Mathe III – alte Klausur von 2005 vorgerechnet am 15.08.2009

10. September 2009

Aufgabe 1

Es soll der betragsmäßig größte Eigenwert der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 4 \\ 3 & -20 & 6 \\ 4 & 6 & 40 \end{pmatrix}$$

bestimmt werden.

a) Zeigen Sie, dass die Vektoriteration nach von Mises mit Startvektor

$$z^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

konvergiert.

Es darf vorausgesetzt werden, dass $z^{(0)}$ nicht senkrecht auf dem Eigenraum zum betragsmäßig größten Eigenwert steht.

b) Führen Sie mit $z^{(0)}$ aus a) eine Iteration des Verfahren nach von Mises durch und berechnen Sie daraus die Näherung an den größten Eigenwert.

Lösung

a) Wir schätzen die Eigenwerte mit Gershgorin-Kreisen ab. Da A symmetrisch ist sind die Eigenwerte reell und somit erhalten wir Gershgorin-Intervalle statt -Kreise:

$$K_1 = [10 - 7{,}10 + 7] = [3{,}17]$$
$$K_2 = [-20 - 9, -20 + 9] = [-29, -11]$$
$$K_3 = [40 - 10{,}40 + 10] = [30{,}50]$$

Da K_3 disjunkt zu $K_1 \cup K_2$ liegt in K_3 genau ein Eigenwert; alle anderen liegen in $K_1 \cup K_2$. Da die Werte im Intervall K_3 betragsmäßig am größten sind liegt der betragsmäßig größte Eigenwert λ_1 in K_3.

Nach Satz der Vorlesung folgt daraus, dass die von Mises-Iteration zum betragsmäßigen größten Eigenvektor konvergiert. Der zugehörige Rayleigh-Quotient konvergiert gegen den begtragsmäßig größten Eigenwert.

b) Allgemein:

$$\tilde{z}^{(k+1)} = A \cdot z^{(k)}, \qquad z^{(k+1)} = \frac{\tilde{z}^{(k+1)}}{\|\tilde{z}(k+1)\|}$$

$$z^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{z}^{(1)} = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 4 \\ 3 & -20 & 6 \\ 4 & 6 & 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 40 \end{pmatrix}$$

z.B. mit Maximumsnorm:

$$z^{(1)} = \frac{\tilde{z}^{(1)}}{\|\tilde{z}^{(1)}\|_\infty} = \frac{1}{40} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{3}{20} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \approx R(z^{(1)},A) = \frac{(z^{(1)})^T A z^{(1)}}{(z^{(1)})^T z^{(1)}} = \frac{16936}{413} \approx 41{,}00726$$

Aufgabe 2

Gegeben seien die Funktionen:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4} & x \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [-1{,}1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Welche dieser Funktionen sind Dichtefunktionen?

b) Wählen Sie eine der Funktionen, die Dichtefunktion ist. Sei X eine Zufallsvariable mit dieser Dichte. Berechnen Sie $P(X > 2)$, $P(X \leq 0)$ sowie $E(X)$ und $Var(X)$.

Lösung

a) Bedingung für eine Dichtefunktion f ist: $f(x) \geq 0$ und $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Für f gilt: $f(x) \geq 0$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{3}{x^4}\,dx = -\frac{1}{x^3}\Big|_1^\infty = 0 - (-\frac{1}{1}) = 1$$

Daraus folgt: f ist eine Dichtefunktion.

Für g gilt: $g(x) \geq 0$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\ dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2\ dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - (-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} \neq 1$$

Also ist g keine Dichtefunktion.

b) X habe Dichte f.

1)

$$P(X > 2) = 1 - \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{2} f(x)\ dx}_{F(2)} = 1 - \int\limits_{1}^{2} \frac{3}{x^4}\ dx = -\frac{1}{x^3}\Big|_{1}^{2} = 1 - (-\frac{1}{8} + 1) = \frac{1}{8}$$

2)

$$P(X \leq 0) = F(0) = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\ dx = 0$$

3)

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\ dx = \int\limits_{1}^{\infty} x \cdot \frac{3}{x^4}\ dx = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{3}{x^3}\ dx = -\frac{3}{2x^2}\Big|_{1}^{\infty} = 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

4)

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - \frac{9}{4}$$

$$E(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\ dx = \int\limits_{1}^{\infty} x^2 \cdot \frac{3}{x^4}\ dx = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{3}{x^2}\ dx = -\frac{3}{x}\Big|_{1}^{\infty} = 0 + 3 = 3$$

Also

$$Var(X) = E(X^2) - \frac{9}{4} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Aufgabe 3

Eine Maschine produziert Widerstände, wobei der Ohmsche Widerstand durch eine normalverteilte Zufallsvariable modelliert wird.
Eine Stichprobe liefert die folgende Messreihe:

$$x_1 = 99\Omega, \quad x_2 = 103\Omega, \quad x_3 = 100\Omega, \quad x_4 = 102\Omega, \quad x_5 = 101\Omega$$

a) Berechne jeweils das Konfidenzintervall für den Erwartungswert zum Niveau $1 - \alpha = 0{,}7$ bzw. $1 - \alpha = 0{,}9$.

b) Ist der Erwartungswert von X größer als 100Ω, dann muss die Maschine nachjustiert werden. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen mit Ergebnissen aus a) folgen und begründen Sie die Entscheidung:

   1) Mit Wahrscheinlichkeit $\geq 0{,}7$ muss die Maschine nachjustiert werden.
   2) Mit Wahrscheinlichkeit $\geq 0{,}9$ muss die Maschine nachjustiert werden.

Lösung

a) Da die Varianz unbekannt ist, ist das $1 - \alpha$ Konfidenzintervall von der Form

$$I = \left[\bar{X}_{(n)} - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2_{(n)}}{n}} \quad , \quad \bar{X}_{(n)} + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2_{(n)}}{n}}\right]$$

Es gilt $n = 5$ und $\bar{x}_{(5)} = \frac{99+103+100+102+101}{5} = 101$.

$$\begin{aligned} S^2_{(5)} &= \frac{1}{5-1} \cdot \sum_{n=1}^{5} (x_i + \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{4}\big((99-101)^2 + (103-101)^2 + (100-101)^2 \\ &\quad + (102-101)^2 + (101-101)^2\big) \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$1 - \alpha = 0{,}7 \Rightarrow \alpha = 0{,}3 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}15 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}85$$

$$I_{0,7} = \left[101 - t_{4;0,85}\sqrt{\frac{\frac{5}{2}}{5}}, 101 + t_{4;0,85}\sqrt{\frac{\frac{5}{2}}{5}}\right] \approx [100{,}1588,\ 101{,}8412]$$

$$1 - \alpha = 0{,}9 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}95$$

$$I_{0,7} = \left[101 - t_{4;0,95}\sqrt{\frac{1}{2}}, 101 + t_{4;0,95}\sqrt{\frac{1}{2}}\right] \approx [99{,}4926,\ 102{,}5074]$$

b) 1) Mit Wahrscheinlichkeit 0,7 liegt $F(x) \in I_{0,7}$ und $I_{0,7}$ enthält nur Werte > 100. Damit gilt

$$\begin{aligned}&P(\text{Maschine muss nachjustiert werden})\\&= P(E(X) \geq 100) \geq P(E(X) \in I_{0,7}\\&= 0{,}7\end{aligned}$$

und somit ist die Aussage 1) wahr.

2) Die Aussage 2) folgt nicht aus den Ergebnissen aus a), da $I_{0,9}$ auch Werte kleiner als 100 enthält.

Aufgabe 4

Gegeben ist das Anfangswertproblem:

$$y'(t) = t \cdot y(t), \qquad y(0) = 1$$

Die exakte Lösung ist $y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

a) Berechne jeweils mit dem expliziten Euler-Verfahren und dem modifizierten Euler-Verfahren (= 2. Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung) für die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ Näherungen an $y(1)$.

b) Beurteile die Qualität der erzielten Lösungen und vergleiche daran die beiden Verfahren.

c) Zeige, dass das modifizierte Euler-Verfahren konsistent von der Ordnung 2 ist. (Anmerkung: Aufgabenvarianten hierzu sind das Zeigen von A- und L-Stabilität.)

Lösung

a) 1) Euler-Verfahren allgemein:

$$u_{j+1} = u_j + hf(h_j,u_j), \quad t_j = 0 + jh$$

Hier: $f(t_j,u_j) = t_j u_j$.
Also ist das Euler-Verfahren in diesem Fall von der Form:

$$u_{j+1} = u_j + ht_j u_j = (1 + ht_j)u_j$$

Die Näherungen berechnen sich zu

$$u_0 = y(0) = 1, \quad h = \frac{1}{2}, \quad t_0 = 0$$

$$u_1 = (1 + 0)u_0 = u_0 = 1$$

$$u_2 = (1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2})u_1 = 1{,}25 \cdot 1 = 1{,}25$$

Das explizite Euler-Verfahren liefert also die Näherung $u_2 = 1{,}25$ für $y(1)$.

2) Modifiziertes Euler-Verfahren allgemein:

$$u_{j+1} = u_j + hf(t_j + \frac{h}{2}, u_j + \frac{h}{2}f(t_j, u_j))$$

Hier: $f(t_j, u_j) = t_j u_j$.

$$u_0 = y(0) = 1, \qquad t_j = jh$$

$$\begin{aligned}
&u_{j+1} = u_j + h(t_j + \frac{h}{2}) \cdot (u_j + \frac{h}{2} t_j u_j) \\
&= u_j(1 + h(t_j + \frac{h}{2})(1 + \frac{h}{2} t_j)) \\
&= (1 + h(\frac{h}{2} + t_j + \frac{h^2}{4} t_j + \frac{h}{2} t_j^2)) u_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&t_0 = 0, \quad u_0 = 1, \quad h = \frac{1}{2} \\
&u_1 = (1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + 0 + 0 + 0)) u_0 = \frac{9}{8} = 1{,}125 \\
&u_2 = (1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4})) \cdot 1{,}125 = 1{,}5996
\end{aligned}$$

b) Mit der exakten Lösung $e^{\frac{t^2}{2}}$ ergibt sich

$$y_1 = y(\frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{8}} \approx 1{,}1331$$

$$y_2 = y(1) = e^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}6487$$

Euler: $u_1 = 1, u_2 = 1{,}125$

Mod. Euler: $u_1 = 1{,}125, u_2 = 1{,}5996$

Man sieht sofort, dass die Fehler $(y_1 - u_1)$ und $(y_2 - u_2)$ für das modifizierte Euler-Verfahren viel geringer sind.

c) 1. Variante: Schreibe Verfahren als zweistufige Runge-Kutta-Verfahren und prüfe Konsistenzbedingungen aus dem Satz der Vorlesung über Konsistenzordnung für Runge-Kutta-Verfahren.

2. Variante: Taylorentwicklung liefert:

$$y(t+h) - y(t) = y'(t)h + \frac{1}{2} y''(t) h^2 + O(h^3)$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned}
y''(t) &= (y'(t))' = (f(t, y(t)))' = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t)) \cdot y'(t) \\
&= f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t)) \cdot f(t, y(t))
\end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$\frac{y(t+h)-y(t)}{h} = f(t,y(t)) + \frac{1}{2}\Big(f_t(t,y(t)) + f_y(t,y(t)) \cdot f(t,y(t))\Big)h + O(h^2)$$

Der Konsistenzfehler berechnet sich mit

$$\tau(t,h) = \left|\frac{y(t+h)-y(t)}{h} - \Phi(t,y(t);h)\right|$$

Die Verfahrensfunktion für das modifizierte Eulerverfahren lautet

$$\begin{aligned}
\Phi(t,y(t);h) &= f\Big(t+\frac{h}{2},\, y(t) + \frac{h}{2}f(t,y(t))\Big) \\
&\overset{Taylor}{=} f(t,y(t)) + \frac{h}{2}f_t(t,y(t)) + \frac{h}{2}f_y(t,y(t)) \cdot f(t,y(t)) + O(h^2) \\
&= f(t,y(t)) + \frac{1}{2}\Big(f_t(t,y(t)) + f_y(t,y(t))f(t,y(t))\Big)h + O(h^2)
\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Formel für den Konsistenzfehler ergibt sich

$$\begin{aligned}
\tau(t,h) = &\Bigg| f(t,y(t)) + \frac{1}{2}\Big(f_t(t,y(t)) + f_y(t,y(t)) \cdot f(t,y(t))\Big)h + O(h^2) \\
&- \Big[f(t,y(t)) + \frac{1}{2}\Big(f_t(t,y(t)) + f_y(t,y(t)) \cdot f(t,y(t))\Big)h + O(h^2)\Big]\Bigg| \\
= &\, O(h^2)
\end{aligned}$$

Also ist das Verfahren konsistent von der Ordnung 2.