Mathe II für Inf/WInf
Sommersemester 2008
Vorlesungsskript

Felix Günther

2. September 2008

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Taylor- und Fourierreihen

1.1 Folgen und Reihen von Funktionen

1.1.1 Definition

Sei M eine Menge von Funktionen von D ($\subseteq \mathbb{R}$) nach $\mathbb{R}$:

i) $f : \mathbb{N} \to M$ heißt *Folge in M*.

ii) Ist $f(n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M, so heißt $s_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$ *n-te Partialsumme*.
Beachte: s_n ist eine Funktion von D nach $\mathbb{R}$. $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Reihe zu (f_n).

1.1.2 Definition (Punktweise Konvergenz)

i) Die Funktionsfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt auf D *punktweise konvergent*, falls für alle $x \in D$ der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert.

   $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *punktweiser Grenzwert*, falls

   $$\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k \geq N |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$$

   f heißt *Grenzfunktion* der Folge (f_n)

ii) Die Funktionsreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert punktweise auf D, wenn die Folge (s_n) der Partialsummen punktweise konvergiert.

   $$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} s_n = g$$

   g ist Summe von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$

Beispiel

$$D = [0,1], f_n : D \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$$
$$x < 1 : \lim_{n\to\infty} x^n = 0$$
$$x = 1 : \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$$

Grenzfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

(nicht stetig, obwohl alle f_n stetig)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{für } 0 \le x < 1 \\ \infty & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

1.1.3 Definition (Gleichmäßige Konvergenz)

Die Funktionsfolge (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \ge N \, \forall x \in D |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Wir schreiben: $(f_n) \underset{\text{gleichmäßig}}{\longrightarrow} f$
Anmerkung:

$$\forall x \in D |f(x) - f_n(x)| \le \varepsilon \leftrightarrow \sup_{x\in D} |f(x) - f_n(x)| \le \varepsilon$$

Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz.
Die Funktionsreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig gegen $g : D \to \mathbb{R}$, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen gleichmäßig gegen g konvergiert.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \ge N \, \forall x \in D |g(x) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} f_k(x)}_{s_n(x)}| < \varepsilon$$

Bemerkung

$(f_n) \underset{\text{gleichmäßig}}{\longrightarrow} f \leftrightarrow \|f_n\| \to \|f\|$ wobei $\|g\| = \sup\limits_{x\in D} |f(x)|$

Beispiel

$D = [0,1], f_n(x) = x^n (n \in \mathbb{N})$
(f_n) konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig
Nicht gleichmäßig: $\exists \varepsilon > 0 \, \forall N \in \mathbb{N} \, \exists n \ge N \, \exists x \in D |f(x) - f_n(x)| \ge \varepsilon$

Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$; sei $N \in \mathbb{N}$ fix, aber beliebig; setze $x := \frac{1}{\sqrt[N]{2}}$; $n = N$

$$f_n(x) = \frac{1}{2} \to |\underbrace{f(x)}_{=0} - f_n(x)| = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

(da $f(x)$ entweder $= 0$ oder $= 1$)

1.1.4 Satz

Sei (f_n) eine Folge von $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen auf $D \subseteq \mathbb{R}$ und (c_n) eine Folge in $\mathbb{R}_0^+$, so dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ existiert und $\underbrace{\|f_n\| \leq c_n}_{\forall x \in D |f_n(x)| \leq c_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig.

Beweis

$$\|s_n\| = \|\sum_{k=0}^{n} f_k\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_k\| \leq \sum_{k=0}^{n} c_n \text{ konvergiert}$$

Beispiel

- $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}; D = \mathbb{R}$
  $\|f_n\| \leq \frac{1}{n^2}; c_n = \frac{1}{n^2}; \sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert
  $\longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig
- $D = [-a, a]; 0 \leq a < 1; f_n(x) = x^n; (x \in D)$
  $|f_n(x)| \leq a^n \; \forall x \in D$
  $\|f_n\|_D \leq a^n; \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$
  also konvergiert f_n auf $[-a, a]$ gleichmäßig gegen 0.

1.1.5 Satz

Wenn alle $f_n : D \to \mathbb{R}$ stetig sind und (f_n) auf D gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert, so ist auch die Grenzfunktion f stetig.
Wenn $\sum f_n$ gleichmäßig gegen g konvergiert, so ist auch g stetig.

Bemerkung

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \text{ stetig, } (s_n) \underset{glm.}{\longrightarrow} g \underset{1.Teil}{\Longrightarrow} g \text{ stetig}$$

1.1.6 Satz

Sei $D = [a, b]$ und (f_n) Folge von stetigen Funktionen auf D.

$$(f_n) \underset{glm.}{\longrightarrow} f : \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\, dx = \int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$$

(d.h. Limesbildung und Integration sind austauschbar)

$$\text{Wenn } \sum_{n=0}^{\infty} f_n \underset{glm.}{\longrightarrow} g : \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\, dx = \int\limits_a^b g(x)\, dx = \int\limits_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, dx$$

Beispiel

$D = [0, 1]; f_n(x) = 2nx \cdot e^{-nx^2}$
Für $x \in D$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{e^{nx^2}} = 0 \left(\lim_{n\to\infty} nx^2 = \infty \text{ und } \lim_{u\to\infty} \frac{e^u}{u} = \infty \right)$$

Also auch $\lim\limits_{n\to\infty} 2nx \cdot e^{-nx^2} = 0$
Also $(f_n) \underset{\text{punktweise}}{\longrightarrow} 0$

$$\int\limits_0^1 f_n(x)\, dx = \int\limits_0^1 2nx \cdot e^{-nx^2}\, dx = -e^{-nx^2}\Big|_{x=0}^{x=1} = 1 - e^{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

aber $\int \lim f_n = \int 0 = 0 \neq 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n$
also: wegen Satz 6 konvergiert (f_n) nicht gleichmäßig.

Beispiel

Auf $[0, a]$ $(0 < a < 1)$ konvergiert die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{1-x}$.
Sie konvergiert gleichmäßig weil $\sum a^n$ konvergent ist.

$$-\ln(1-a) = \int\limits_0^a \frac{1}{1-x}\, dx = \int\limits_0^a \sum_{n=0}^{\infty} x^n\, dx \underset{Satz\ 6}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^a x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Also ist $\ln(1-a) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{-a^{n+1}}{n+1}$ (für $0 \leq a < 1$)
In der Übung zu zeigen für $|a| < 1$.

1.1.7 Satz

Sei (f_n) eine Folge differenzierbarer Funktionen auf einem Intervall I mit der Eigenschaft $(f_n) \underset{\text{punktweise}}{\longrightarrow} f$.

i) Wenn die Folge der Ableitungen (f_n') auf I gleichmäßig konvergiert, dann ist f differenzierbar und $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$

ii) In der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ seien die f_n stetig differenzierbar auf einem Intervall I und sei g die Grenzfunktion. Wenn die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'$ auf I gleichmäßig konvergiert, so ist die Summe g auf I differenzierbar und es gilt $g'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$

Beispiel

$f_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{n}$. Dann $(f_n) \underset{glm.}{\longrightarrow} 0$.
$f_n'(x) = n \cos n^2 x$. $|f_n'(\pi)| = n$
Also divergiert $f_n'(\pi)$.

1.2 Potenzreihen („unendliche Polynome“)

1.2.1 Definition

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $x_0 \in \mathbb{R}$, so heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \ (x \in \mathbb{R})$$

Potenzreihe mit Enwicklungspunkt x_o

Beispiel

1. $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! x^n$

1.2.2 Satz (Konvergenzradius)

i) Ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergent für ein r mit $|r| > 0$, so konvergiert die Reihe absolut für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < |r|$.

ii) Wenn die Reihe für ein $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ divergiert, so auch für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > |r|$.

Beispiel

Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

- konvergiert für $|x| < 1$
- divergiert für $|x| > 1$
- konvergiert für $x = -1$ (da die alternierende harmonische Reihe konvergiert)
- divergiert für $x = 1$ (da die harmonische Reihe divergiert)

Definition

$\varrho > 0$ heißt Konvergenzradius von $\sum a_n x^n$ gdw. die Reihe für $|x| < \varrho$ konvergiert und für $|x| > \varrho$ divergiert

1.2.3 Quotientenkriterium

Sei $a_n \neq 0$ für $n \geq n_0$. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = b \in [0, \infty[$, dann ist b der Konvergenzradius von $\sum a_n x^n$.

Beispiel

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} n + 1 = \infty$, also hat $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ den Konvergenzradius ∞
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, also hat $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ den Konvergenzradius 1
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, also divergiert $\sum n!x^n$ für alle $x \neq 0$
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2^n + 1)x^n$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} = \frac{1}{2}$, Konvergenzradius: $\frac{1}{2}$
5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, Konvergenzradius: $\frac{1}{2}$

1.2.4 Wurzelkriterium

Sei

$$c = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \sqrt[n]{|a_k|}$$

Dann ist der Konvergenzradius $\sum a_n x^n$ gegeben durch

- $\varrho = \infty$ wenn $c = 0$
- $\varrho = \frac{1}{c}$ wenn $0 < c < \infty$
- $\varrho = 0$ wenn $c = \infty$

1.2.5 Satz (Rechenregeln für Potenzreihen)

Seien $\sum a_n x^n$ und $\sum b_n x^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien ϱ_a und ϱ_b. Dann gilt für $|x| < \min(\varrho_a, \varrho_b)$, dass

i) $\sum a_n x^n \pm \sum b_n x^n = \sum (a_n \pm b_n) x^n$

ii) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
wobei $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. (*Cauchy-Produkt*)

1.2.6 Satz

Sei $\sum a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ϱ (> 0) und

$$f :]-\varrho, \varrho[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

i) Dann ist f differenzierbar und $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ für alle $x \in]-\varrho, \varrho[$
und der Konvergenzradius von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ ist wiederum ϱ.

ii) f ist auf jedem Intervall $[a, b] \subseteq]-\varrho, \varrho[$ integrierbar (da stetig) und es gilt $\int\limits_a^x f(t)\, dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_a^x a_n t^n\, dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ für alle $|x| < \varrho$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ hat wiederum den Konvergenzradius ϱ.

Beispiel

Für $|x| < 1$ gilt $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$; wegen Satz 6.1 gilt:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

Wegen Satz 5.1 gilt nun für $|x| < 1$, dass:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n x^n &\overset{\text{Satz 5.1}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
&= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} \\
&= \frac{1-(1-x)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

1.3 Taylorreihen

1.3.1 Satz

Sei f auf einem Intervall I (n+1)-mal stetig differenzierbar.
Dann gilt für $x, x_0 \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + R_n(x, x_0)$$

wobei *Restglied* $R_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\ dt$

Bemerkung

Offenbar, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x, x_0) = 0$, dann $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n$, d.h. die Taylorreihe für f konvergiert an der Stelle x gegen $f(x)$.

Bemerkung

Restglied nach Lagrange: $\exists 0 < \theta < 1$: $R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$
Restglied nach Cauchy: $\exists 0 < \theta < 1$: $R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!} (1-\theta)^n (x - x_0)^{n+1}$

Beispiel

$$f(x) = \sin x$$
$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f^{(3)}(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x$$
$$f^{(2n)}(0) = 0, f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \underbrace{R_{2n+1}(x, 0)}_{\leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}}$$

(Lagrangesche Restgliedabschätzung)

1.4 Fourierreihen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt 2π-periodisch, falls $f(x) = f(x + 2\pi)\ \forall x \in \mathbb{R}$
Beispiele:

- sin, cos, $\sin(3x)$, $\cos(27x)$
- Konstante Funktionen
- $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

Idee: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

1.4.1 Definition (Fourierreihe und -koeffizienten)

Sei f auf $[0, 2\pi]$ integrierbar.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)\; dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)\; dt$$

$$\mathrm{FR}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

a_n, b_n heißen *Fourierkoeffizienten*, $\mathrm{FR}(f)(x)$ heißt *Fourierreihe.*

Bemerkung

Im Allgemeinen braucht $\mathrm{FR}(f)(x)$ nicht (punktweise) zu konvergieren und $f(x)$ kann verschieden von $\mathrm{FR}(f)(x)$ sein.

1.4.2 Definition (Stückweise stetige Differenzierbarkeit)

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt stückweise stetig differenzierbar, falls es eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ gibt, so dass die Einschränkung auf $]a_k, a_{k+1}[$ jeweils stetig differenzierbar ist.

1.4.3 Satz

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch und stetig differenzierbar auf $[0, 2\pi]$.
Dann konvergiert die Fourierreihe (punktweise) für alle $x \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$\mathrm{FR}(f)(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$$

wobei $f(x_+) = \lim\limits_{t \to x,\, t > x} f(t)$ und $f(x_-) = \lim\limits_{t \to x,\, t < x} f(t)$

Bemerkung

Ist f stetig, dann $\mathrm{FR}(f)(x) = f(x)$.

Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} h & 0 < x < \pi \\ -h & \pi < x < 2\pi \\ 0 & x \in \{0, \pi, 2\pi\} \end{cases}$$

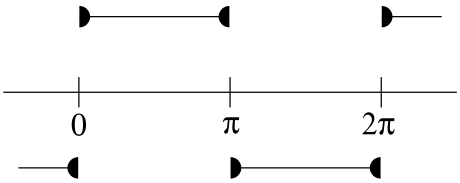


Abbildung 1.1: 2π-periodische Funktion $f(x)$

Bestimmung der Koeffizienten a_n:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} h\cos(nt)\ dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_\pi^{2\pi} h\cos(nt)\ dt \\
&= \frac{h}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(nt)\ dt - \frac{h}{\pi}\int\limits_\pi^{2\pi} \cos(nt)\ dt \\
&= \frac{h}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(nt)\ dt - \frac{h}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \underbrace{\cos(n(t+\pi))}_{=\cos(nt+nx)=\cos(nt)}\ dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

(da $(\frac{1}{n}\sin(nt))' = \cos(nt)$)

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\ dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} h\sin(nt)\ dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_\pi^{2\pi} h\sin(nt)\ dt \\
&= \text{... (analog) ...} \\
&= \frac{h}{n\pi}(-\cos(n\pi) + \cos(0) + \cos(2n\pi) - \cos(n\pi)) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{n gerade } (\cos(n\pi) = 1,\ \cos(2n\pi) = 1) \\ \frac{4h}{n\pi} & \text{n ungerade } (\cos(n\pi) = -1,\ \cos(2n\pi) = 1) \end{cases}
\end{aligned}$$

(da $(\frac{-1}{n}\cos(nt))' = \sin(nt)$)

1.4.4 Gibbssches Phänomen

An der Sprungstelle schießen die Approximationen auch in kleinen Umgebungen über halbe Sprunghöhen hinaus.

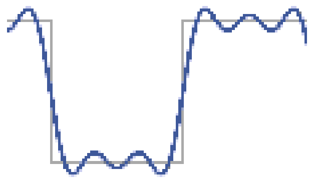


Abbildung 1.2: Gibbssches Phänomen

1.4.5 Fourierreihen für 2π-periodische Fkt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\mathrm{FR}(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_n e^{inx}$$

mit $c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt$
(oft einfacher zu berechnen)

1.4.6 Rechenvereinfachungen

- f gerade: $f(x) = f(-x) \Rightarrow b_n = 0$
- f ungerade: $f(x) = -f(-x) \Rightarrow a_n = 0$

Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \pi \\ 2\pi - x & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

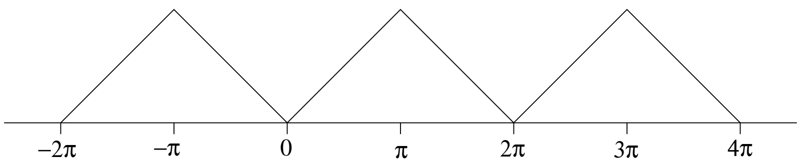


Abbildung 1.3: 2π-periodische Funktion $f(x)$

$f(x) := |x|$ auf dem Intervall $-\pi \le x \le \pi$. Also ist f gerade und somit $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \cos 0x\, dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos nx \; dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x \cos nx \; dx \\
&\overset{\text{part. Integr.}}{=} \frac{2}{\pi} \left(\frac{x \sin nx}{n} \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} \; dx \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \frac{\cos nx}{n^2} \Big|_{x=0}^{x=\pi} \\
&= \begin{cases} -\frac{2}{n^2 \pi} & \text{n ungerade} \\ 0 & \text{n gerade} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{FR}(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}
$$

Konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Kapitel 2

Lineare Algebra

2.1 Vektoren und Geraden in $\mathbb{R}^2$ (Kap. 7)

$\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) bezeichnet den n-dimensionalen euklidischen Raum.

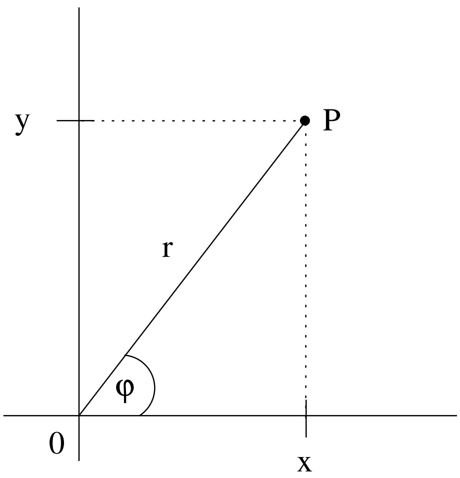


Abbildung 2.1: Punkt im $\mathbb{R}^2$

x heißt *Abszisse*, y heißt *Ordinate* von P.

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

heißt *Polardarstellung von P.*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \qquad (x \neq 0)$$

$r = y,\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \qquad (y > 0, x = 0)$

$r = -y,\ \varphi = \dfrac{3\pi}{2} \qquad (y < 0, x = 0)$

$r = 0,\ \varphi$ beliebig $\qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.1.1 Definition (Gerade)

Eine Gerade ist eine Menge $\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | Ax + By = C\}$ wobei $A \neq 0$ oder $B \neq 0$. A und B heißen *Koeffizienten*.

Bemerkung

- Wenn $B \neq 0$: $y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$, wenn $A \neq 0$: $x = -\frac{B}{A}y + \frac{C}{A}$
- Wenn $\lambda \neq 0$, so hat $\lambda Ax + \lambda By = \lambda C$ die selbe Lösungsmenge wie $Ax + By = C$.
- Man kann stets eine kanonische Form dieser Beschreibung angeben: die sogenannte *Hessesche Normalform*.

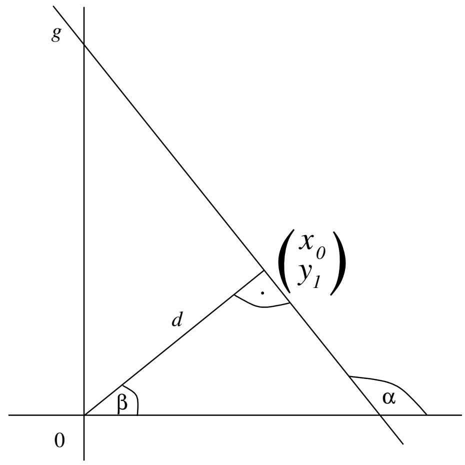


Abbildung 2.2: Hessesche Normalform einer Geraden

$\alpha = \beta + \dfrac{\pi}{2}$ (Richtung der Geraden)

$$\begin{aligned} y - y_0 = \tan\alpha(x - x_0) &\Leftrightarrow \underbrace{\cos\alpha}_{=-\sin\beta}(y - y_0) = \underbrace{\sin\alpha}_{=\cos\beta}(x - x_0) \\ &\Leftrightarrow \cos\beta \cdot (x - x_0) + \sin\beta \cdot (y - y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\beta \cdot x + \sin\beta \cdot y = \underbrace{\cos\beta \cdot x_0 + \sin\beta \cdot y_0}_{\substack{(\cos^2\beta \cdot d + \sin^2\beta \cdot d) \\ x_0 = \cos\beta \cdot d \quad y_0 = \sin\beta \cdot b}} = d \\ &\Leftrightarrow \cos\beta \cdot x + \sin\beta \cdot y = d \end{aligned}$$

2.1.2 Satz

Die Hessesche Normalform der Geradengleichung $Ax + By = C$ erhält man durch Multiplikation mit der Zahl

$$\lambda := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} & \text{wenn } C > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} & \text{wenn } C < 0 \end{cases}$$

Das heißt, es gilt $\cos\beta = \lambda A, \sin\beta = \lambda B, d = \lambda C$.

Bemerkung

$\tan\alpha = -\frac{A}{B} = -\cot\beta$

2.1.3 Definition (Vektor)

Ein *Vektor* $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^2$ ist eine Klasse von Strecken mit gleicher Richtung und gleicher Länge. Er wird durch ein Paar reeller Zahlen $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ (*x- und y-Komponente von* $\vec{v}$) oder alternativ durch Strecken mit beliebigem Anfangspunkt (x_0, y_0) und Endpunkt $(x_0 + v_x, y_0 + v_y)$ dargestellt.

Notation

$(v_x, v_y)^T = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}^T = (v_x, v_y)$ (T steht für *Transponieren*)

Rechenoperationen und -regeln für Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Sei $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \pm \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \pm v_x \\ u_y \pm v_y \end{pmatrix} \text{ (Vektoraddition)}$$

Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ (d.h. λ ist ein *Skalar*)

$$\lambda \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda u_x \\ \lambda u_y \end{pmatrix} \text{ (Streckung um Faktor } \lambda)$$

Für $\lambda = 0$ erhalten wir den Nullvektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{u}$.

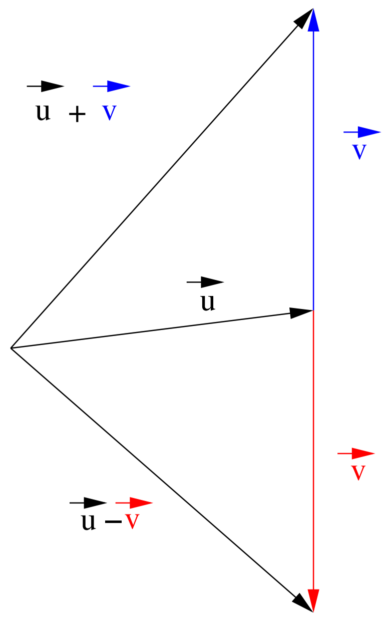


Abbildung 2.3: Vektoraddition und -subtraktion

$$\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$$
$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v}$$

Euklidische Länge

Euklidische Länge von $\vec{u}$: $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$

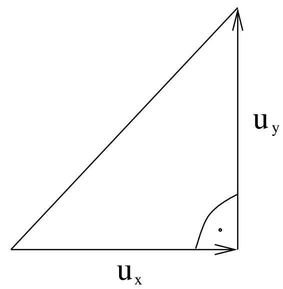


Abbildung 2.4: Euklidische Länge eines Vektors

Es gilt:

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \text{ (Dreiecksungleichung)}$$
$$|\vec{u} - \vec{v}| \geq \Big||\vec{u}| - |\vec{v}|\Big|$$

Vektoren der Länge 1 heißen *Einheitsvektoren* (allgemeine Form: $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$)

Koordinateneinheitsvektoren

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jeder Vektor $\vec{u}$ lässt sich eindeutig darstellen als $\vec{u} = \lambda_1 \cdot \vec{e_1} + \lambda_2 \cdot \vec{e_2}$. Eindeutig bedeutet:

$$\vec{u} = \underbrace{\lambda_1 \cdot \vec{e_1} + \lambda_2 \cdot \vec{e_2}}_{\text{Linearkombination}} \Leftrightarrow \lambda_1 = u_x \wedge \lambda_2 = u_y$$

Skalarprodukt

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

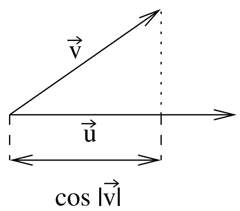


Abbildung 2.5: Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \vec{u} &= r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \\ \vec{v} &= s \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} \\ r, s &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= r \cdot s \cdot \cos(\psi - \varphi) \\ &= r \cdot s \cdot (\cos \psi \cdot \cos(-\varphi) - \sin \psi \cdot \underbrace{\sin(-\varphi)}_{-\sin \varphi} \\ &= r \cdot s \cdot (\cos \varphi \cdot \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi) \\ &= \underbrace{r \cos \varphi}_{u_x} \cdot \underbrace{s \cdot \cos \psi}_{v_x} + \underbrace{r \cdot \sin \varphi}_{u_y} \cdot \underbrace{s \cdot \sin \psi}_{v_y} \end{aligned}$$

2.1.4 Satz

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y$$

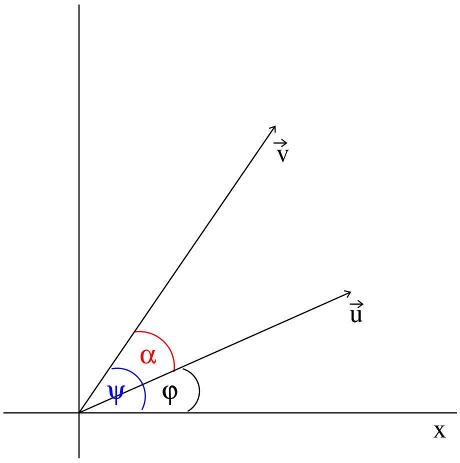


Abbildung 2.6: Winkel im Skalarprodukt

Rechenregeln für Skalarprodukt

$$\begin{aligned}
&\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \\
&(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \\
&(\lambda \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda \cdot \vec{v})
\end{aligned}$$

$$\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Wenn α der von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eingeschlossene Winkel ist:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_x v_x + u_y v_y}{\sqrt{(u_x^2 + u_y^2)(v_x^2 + v_y^2)}}$$

Seien $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 &\Leftrightarrow \vec{u} \text{ und } \vec{v} \text{ stehen senkrecht aufeinander} \\
\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| &\Leftrightarrow \vec{u} \text{ und } \vec{v} \text{ zeigen in die gleiche Richtung} \\
\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| &\Leftrightarrow \vec{u} \text{ und } \vec{v} \text{ zeigen in entgegengesetzte Richtung} \\
&(\Leftrightarrow \cos\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \pi)
\end{aligned}$$

Vektorielle Darstellung von Geraden

Gerade in Parameterdarstellung:

$$\vec{r} = \underbrace{\vec{r_1}}_{\text{Punkt auf der Geraden}} + \lambda \cdot \underbrace{\vec{t}}_{\text{Richtungsvektor}} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Sei $\vec{r_0} = \vec{r_1} + \lambda_0 \cdot \vec{t}$ orthogonal zu $\vec{t}$:

$$\vec{r_0} \cdot \vec{t} = 0 \Leftrightarrow \vec{r_1} \cdot \vec{t} + \lambda_0 \cdot \vec{t} \cdot \vec{t} = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 = \frac{-\vec{r_1} \cdot \vec{t}}{|\vec{t}|^2}$$

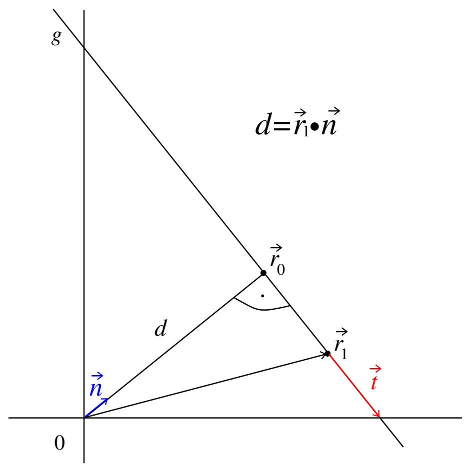


Abbildung 2.7: Vektorielle Darstellung von Geraden

$$\vec{n} = \frac{\vec{r_0}}{|\vec{r_0}|} \text{ heißt } \textit{Normalenvektor der Geraden}$$
$$d = |\vec{r_0}|$$
$$\vec{r_0} = d \cdot \vec{n}$$

Hessesche Normalform der Gerade:

$$(\vec{r} - \vec{r_1}) \cdot \vec{n} = \vec{r} \cdot \vec{n} - d = 0$$

d.h.

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = d$$

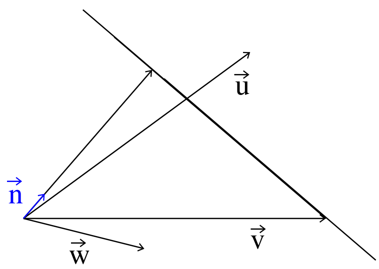


Abbildung 2.8: Abstände von Punkten im Verhältnis zu einer Geraden

$\vec{n} \cdot \vec{u} > d$ ($\vec{u}$ auf der anderen Seite der G. vom Ursprung aus gesehen)
$\vec{n} \cdot \vec{w} < d$ ($\vec{w}$ auf dieser Seite der Geraden vom Ursprung aus gesehen)
$\vec{n} \cdot \vec{v} = d$ ($\vec{v}$ auf der Geraden)

(siehe Abbildung 2.8)

2.2 Vektoren, Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$

2.2.1 Definition (Ebene und Gerade)

Eine *Ebene* ist die Menge aller $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, so dass

$$Ax + By + Cz = D$$

wobei nicht alle A, B, C gleich 0 sind.
Die Lösungsmenge ändert sich nicht, wenn wir die Gleichung mit $\lambda \neq 0$ multiplizieren.
Eine *Gerade* ist der Schnitt zweier Ebenen

$$Ax + By + Cz = D$$
$$\hat{A}x + \hat{B}y + \hat{C}z = \hat{D}$$

wobei kein λ existiert mit $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) = \lambda(A, B, C)$ (d.h. die beiden Ebenen sind nicht parallel).

2.2.2 Definition (Vektor)

Ein *Vektor* in $\mathbb{R}^3$ ist eine Klasse von Strecken gleicher Länge und gleicher Richtung. Er wird durch ein Tripel

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

reeller Zahlen angegeben. u_x, u_y, u_z sind die *Komponenten* von $\vec{u}$. Dieses Tripel repräsentiert Strecken mit beliebigem Anfangspunkt (x_0, y_0, z_0) und Endpunkt $(x_0 + u_x, y_0 + u_y, z_0 + u_z)$.

2.2.3 Rechenoperationen im $\mathbb{R}^3$

Ähnlich wie im $\mathbb{R}^2$ definiert man:

- $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{pmatrix}$
- $\lambda \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot u_x \\ \lambda \cdot u_y \\ \lambda \cdot u_z \end{pmatrix}$

- $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \underset{\text{Euklid. Norm von } \vec{u}}{=} \sqrt{\left(\sqrt{u_x^2 + u_y^2}\right)^2 + u_z^2}$

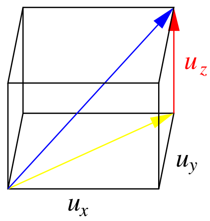


Abbildung 2.9: Berechnung der Eukl. Norm von $\vec{u}$ (blau)

Die drei Basisvektoren sind:

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allgemein sind die Basisvektoren im n-dimensionalen Raum:

$$(\vec{e_i})_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn i = j} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ein Vektor lässt sich demnach auch wie folgt darstellen:

$$\vec{u} = u_x \cdot \vec{e_1} + u_y \cdot \vec{e_2} + u_z \cdot \vec{e_3}$$

Diese Darstellung ist eindeutig, d.h.

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \lambda_3 \vec{e_3} \Rightarrow u_x = \lambda_1 \wedge u_y = \lambda_2 \wedge u_z = \lambda_3$$

Skalarprodukt

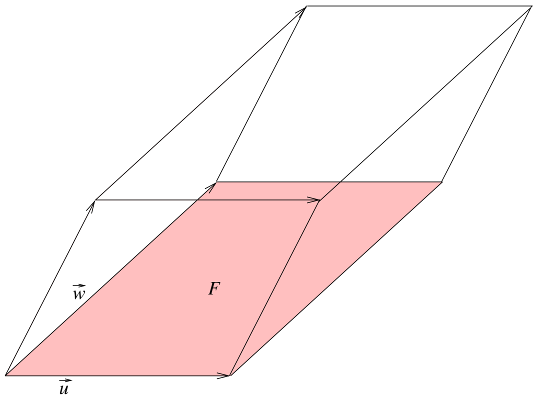
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

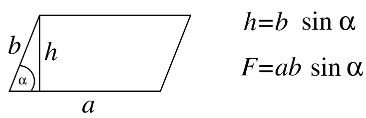
wobei α der von den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eingeschlossene Winkel ist.

2.2.4 Satz (Skalarprodukt)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$





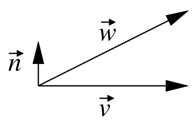
2.2.5 Spat- und Vektorprodukt

Die Fläche des von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms berechnet sich:

$$|F_{\vec{v},\vec{w}}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin\alpha$$

Für $\vec{v}$, $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^3$ sei $\vec{n}$ derjenige Vektor, so dass

- $|\vec{n}| = 1$, d.h. der Vektor ist normiert
- $\vec{u}$ ist senkrecht auf $\vec{v}$ und $\vec{w}$
- $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{n})$ ist ein Rechtssystem



Vektorprodukt

$$\vec{v} \times \vec{w} = |F| \cdot \vec{n}$$

2.2.6 Satz (Rechenregeln)

Es gelten die Rechenregeln

- $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$
- $\lambda \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\lambda \cdot \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times \lambda \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

- $(\vec{v}+\vec{w}) \times \vec{u} = (\vec{v} \times \vec{u}) + (\vec{w} \times \vec{u})$

Überdies gilt

- $\vec{e_1} \times \vec{e_2} = \vec{e_3}$
- $\vec{e_2} \times \vec{e_3} = \vec{e_1}$
- $\vec{e_3} \times \vec{e_1} = \vec{e_2}$

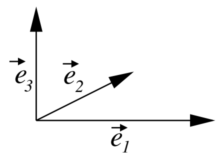


Abbildung 2.10: Die drei Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$

2.2.7 Satz (Vektorprodukt)

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= (u_x \cdot \vec{e_1} + u_y \cdot \vec{e_2} + u_z \cdot \vec{e_3}) \times \underbrace{(v_x\vec{e_1} + v_y\vec{e_2} + v_z\vec{e_3})}_{\vec{v}} \\
&= u_x \cdot (\vec{e_1} \times \vec{v}) + u_y \cdot (\vec{e_2} \times \vec{v}) + u_z \cdot (\vec{e_3} \times \vec{v}) \\
&= u_x \cdot (v_x \cdot \underbrace{(\vec{e_1} \times \vec{e_1})}_{(0,0,0)^T} + v_y \cdot \underbrace{(\vec{e_1} \times \vec{e_2})}_{\vec{e_3}} + v_z \cdot \underbrace{(\vec{e_1} \times \vec{e_3})}_{-\vec{e_2}}) \\
&\quad + u_y \cdot (v_x \cdot \underbrace{(\vec{e_2} \times \vec{e_1})}_{-\vec{e_3}} + v_y \cdot \underbrace{(\vec{e_2} \times \vec{e_2})}_{(0,0,0)^T} + v_z \cdot \underbrace{(\vec{e_2} \times \vec{e_3})}_{\vec{e_1}}) \\
&\quad + u_z \cdot (v_x \cdot \underbrace{(\vec{e_3} \times \vec{e_1})}_{\vec{e_2}} + v_y \cdot \underbrace{(\vec{e_3} \times \vec{e_2})}_{-\vec{e_1}} + v_z \cdot \underbrace{(\vec{e_3} \times \vec{e_3})}_{(0,0,0)^T}) \\
&= u_x v_y \vec{e_3} - u_x v_z \vec{e_2} - u_y v_x \vec{e_3} + u_y v_z \vec{e_1} + u_z v_x \vec{e_2} - u_z v_y \vec{e_1} \\
&= \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Der Inhalt der von den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Fläche $F_{\vec{u},\vec{v}}$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$|F_{\vec{u},\vec{v}}| = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(u_y v_z - u_z v_y)^2 + (u_z v_x - u_x v_z)^2 + (u_x v_y - u_y v_x)^2}$$

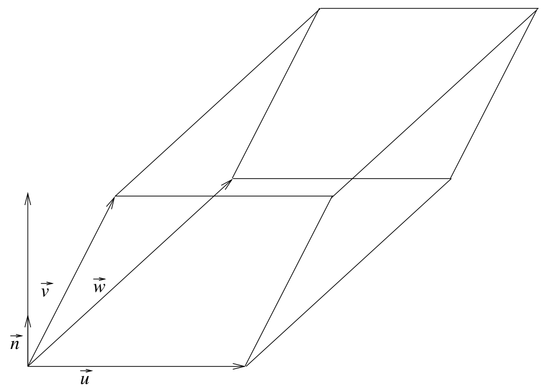
Man rechnet leicht nach, dass

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

2.2.8 Spatprodukt bzw. Determinante

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = |F_{\vec{v},\vec{w}}| \cdot \vec{n} \cdot \vec{u}$$

ist das Volumen des durch $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ aufgespannten Spats.



Dieses notiert man oft in der Form:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix}$$

2.2.9 Satz (Spat)

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = u_x v_y w_z + u_y v_z w_x + u_z v_x w_y - u_x v_z w_y - u_y v_x w_z - u_z v_y w_x$$

Bemerkung

Diese Operation ist in jeder Komponente linear.

2.2.10 Vektorielle Darstellung von Ebenen und Geraden

Satz

Sei $\vec{r_1}$ ein Ortsvektor und $\vec{s}, \vec{t} \neq 0$ nicht-parallele Vektoren. Dann ist durch

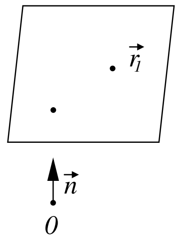
$$\{\vec{r_1} + \lambda \vec{s} + \mu \vec{t} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ in Parameterform gegeben.
Zur *Hesseschen Normalform* dieser Ebene gelangt man durch

$$\vec{s} \times \vec{t} = \vec{N} = A\vec{e_1} + B\vec{e_2} + C\vec{e_3}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\pm|\vec{N}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \vec{N}$$

($\vec{n}$ hat die Länge 1)
Wir wählen das Vorzeichen so, dass $d := \vec{r_1} \cdot \vec{n} \geq 0$.



$$\vec{r} \cdot \vec{n} = d \qquad (\textit{Hessesche Normalform} \text{ der Ebene})$$

$\vec{n}$ ist Normalenvektor auf die Ebene, "der in Richtung von $\vec{r_1}$ zeigt." d ist der Abstand der Ebene zum Ursprung.

2.2.11 Abstand zweier windschiefer Geraden

Gegeben seien zwei windschiefe Geraden:

$$g_1 : \vec{r_1} + \lambda \vec{s}$$
$$g_2 : \vec{r_2} + \mu \vec{t}$$

Man berechnet einen zu $\vec{s}$ und $\vec{t}$ normalen und normierten Vektor $\vec{l}$:

$$\vec{l} = \frac{\vec{s} \times \vec{t}}{|\vec{s} \times \vec{t}|}$$

Der Abstand der beiden Geraden berechnet sich wie folgt:

$$d(g_1, g_2) = |\underbrace{\vec{l} \cdot (\vec{r_2} - \vec{r_1})}_{\vec{l} \cdot \vec{r_2} - \vec{l} \cdot \vec{r_1}}|$$

$\vec{l} \cdot \vec{r_i}$ ist der Abstand von $\vec{r_i}$ zur Ebene durch den Ursprung, die zu beiden Geraden parallel ist.

2.3 Vektorräume (lineare Räume) über $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$)

2.3.1 Definition (Vektorraum)

Ein *Vektorraum (linearer Raum) über* $\overset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}}$ ist eine Menge V zusammen mit Abbildungen $- + - : V \times V \to V$ und $- \cdot - : \overset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}} \times V \to V$, so dass

1. $u + v = v + u$ (Kommutativgesetz)
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ (Assoziativgesetz)
3. es existiert (genau) ein $0 \in V$ mit $0 + u = u = u + 0$ für alle $u \in V$

4. zu jedem $u \in V$ existiert (genau) ein $-u \in V$ mit $u + (-u) = 0$
5. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ (1. Distributivgesetz)
6. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ (2. Distributivgesetz)
7. $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$
8. $1 \cdot u = u$

Die Punkte 1 bis 4 besagen, dass $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist.
Die Elemente aus V heißen *Vektoren*, die Elemente aus $\overset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}}$ heißen *Skalare*.

Vektoraddition und Skalarmultiplikation

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad\qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} \qquad\qquad \lambda \cdot u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$$

2.3.2 Definition (Untervektorraum)

Sei V ein Vektorraum. Ein *Untervektorraum* (linearer *Unter*- (bzw. Teil-) Raum) ist eine Menge $U \subseteq V$, so dass $u_1, \ldots, u_n \in V \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n \in U$. Das heißt, U ist unter Linearkombinationen abgeschlossen. (Für $n = 0$ erhalten wir $\vec{0} \in U$.)
Äquivalent sind die Bedingungen: $0 \in U, \quad u, v \in U \Rightarrow \alpha u + \beta v \in U$.

2.3.3 Definition (Linearkombination)

Seien $u_1, \ldots, u_n \in V$. Dann heißt $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ *Linearkombination* der Vektoren $u_1, \ldots, u_n$.
$u_1, \ldots, u_n$ heißen *linear unabhängig*, wenn keines der u_i als Linearkombination der restlichen u_j darstellbar ist (äquivalent dazu ist: $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$).

2.3.4 Definition (Erzeugendensystem)

Ein System $\{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq V$ heißt *Erzeugendensystem* von V, wenn jeder Vektor $v \in V$ darstellbar ist als $v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$.
Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt *Basis für V*.
Wenn es für V eine endliche Basis $\{u_1, \ldots, u_n\}$ gibt, so heißt V n-dimensional.

$$\dim(V) = n$$

Bemerkung

Man kann zeigen, dass alle Basen von V gleich viele Elemente enthalten. Wenn keine endliche Basis für V existiert, heißt V unendlichdimensional

$$\dim(V) = \infty$$

(Beispiele: $\mathbb{R}^I$ mit I unendlich, $C[0,1]$, etc.)

Beispiel

Basen für $\mathbb{R}^n$: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (wobei die 1 in der i. Zeile steht)

In $\mathbb{R}^2$ ist auch $\left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_2} \right\}$ eine Basis.

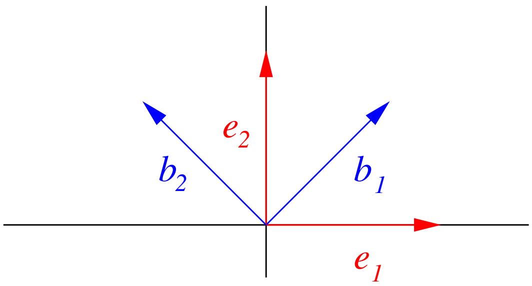


Abbildung 2.11: Die drei Komponenten eines Vektors im $\mathbb{R}^3$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist ebenfalls eine Basis für $\mathbb{R}^2$, aber keine ONB (siehe unten).

Skalarprodukt

Für $u, v \in \mathbb{R}^n$ heißt $u \cdot v = \sum_{k=1}^{n} u_k \cdot v_k$ *Skalarprodukt* von u und v.

$$|u| = (u \cdot u)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k^2} \qquad \text{(Euklidische Länge von u)}$$

Orthonormalbasis

$\{u_1, \ldots, u_n\}$ heißt *Orthonormalbasis* (ONB), wenn $u_1, \ldots, u_n$ eine Basis ist mit $u_i \cdot u_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. ($|u_i| = 1$ und $u_i \cdot u_j = 0$ wenn $i \neq j$)

2.3.5 Definition (Lineare Abbildung)

Seien V und W Vektorräume. Eine Abbildung $\varphi : V \to W$ heißt *linear*, wenn $\varphi(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot \varphi(u) + \beta \cdot \varphi(v)$ (gdw. $\varphi(\alpha u) = \alpha\varphi(u)$ und $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$)

2.3.6 Satz (Bild und Kern)

Bild $(\varphi) = \{\varphi(u) | u \in V\}$ Untervektorraum von W. (*Bild*)
$\ker(\varphi) = \{u \in V | \varphi(u) = 0\}$ Untervektorraum von V. (*Kern*)

Bemerkung

φ injektiv $\Leftrightarrow \ker(\varphi) = \{0\}$
($\varphi(u) = \varphi(v) \Leftrightarrow \varphi(u) - \varphi(v) = 0 \Leftrightarrow \varphi(u - v) = 0 \Leftrightarrow u - v \in \ker(\varphi)$)

2.3.7 Satz

Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist bereits festgelegt durch

$$\vec{a_k} := \varphi(\vec{e_k}) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

weil

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} u_k \cdot \vec{e_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} u_k \cdot \varphi(\vec{e_k}) = \sum_{k=1}^{n} u_k \cdot \vec{a_k}$$

Für beliebige $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n} \in \mathbb{R}^m$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $\varphi(\vec{e_i}) = \vec{a_i} \quad (i = 1, \ldots, n)$. $\left(\varphi(u) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \cdot \vec{a_k}\right)$
φ wird dargestellt durch $(\vec{a_1} | \ldots | \vec{a_n})$ ($m \times n$-Matrix)

2.3.8 Dimensionssatz

Wenn $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dann $\dim(\ker \varphi) + \dim(\text{Bild } \varphi) = n$.

2.4 Matrizen

2.4.1 Definition (Matrix)

Eine $m \times n$-*Matrix* ist ein rechteckiges Zahlenschema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n}}$$

i ist der Zeilenindex, j der Spaltenindex der Matrix.
$\mathbb{R}^{m \times n}$ (bzw. $\mathbb{C}^{m \times n}$) ist die Menge der Matrizen mit m Zeilen und n Spalten und Einträgen aus $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt *quadratisch*, wenn $n = m$.
Der Vektor $(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ heißt (Haupt-)*Diagonale* von A.

Operationen auf Matrizen

$$(\alpha \cdot A)_{ij} = \alpha \cdot A_{ij} \qquad (A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$
$$A \in \mathbb{R}^{m\times n} \mapsto A^T \in \mathbb{R}^{n\times m} \quad (A^T)_{ji} = A_{ij}$$

(A^T heißt *Transponierte von* A)

Produkt von Matrizen

$A \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n\times r}$

$$A \cdot B \in \mathbb{R}^{m\times r} \text{ ist definiert als } (A\cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Also ist das Produkt von Matrizen nicht kommutativ.

Rechengesetze für Matrizen

- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (Assoziativgesetz)
- $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
  $C \cdot (A+B) = C \cdot A + C \cdot B$ (Distributivgesetze)
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

2.4.2 Satz

Lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ stehen in folgender 1-1-Entsprechung zu $m \times n$-Matrizen.

- Ein lineares $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ induziert die $m \times n$-Matrix A mit $a_{ji} = \varphi(\vec{e_i})_j$
- $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ induziert die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wobei $\varphi(u)_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot u_j$ ($\varphi(\vec{e_j})$ ist der j. Spaltenvektor von A).

Bemerkung

$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \leftrightsquigarrow I_n = (\delta_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi \circ \varphi \leftrightsquigarrow BA$$

Beweis

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \psi = \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear $\varphi \leftrightsquigarrow A \quad \psi \leftrightsquigarrow B$

$$A_{ji} = \varphi(\vec{e_i})_j \quad B_{kj} = \psi(\vec{e_j})_k$$

Zu zeigen:

$$(\psi \circ \varphi)(\vec{e_i})_k = (BA\vec{e_i})_k = \sum_{j=1}^{n} B_{kj} A_{ji}$$

$$\psi(\varphi(\vec{e_i}))_k = \psi \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{pmatrix}_k = \psi(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot \vec{e_j})_k = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot \psi(\vec{e_j}) \right)_k$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot \psi(\vec{e_j})_k = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\psi(\vec{e_j})_k}_{b_{kj}} \cdot a_{ji} = (B \cdot A)_{ki}$$

2.4.3 Definition (Zeilen- und Spaltenrang)

Der *Zeilen- bzw. Spaltenrang* einer Matrix A ist die maximale Anzahl von linear unabhängigen Zeilen- bzw. Spaltenvektoren.
Man kann zeigen, dass Zeilen- und Spaltenrang immer übereinstimmen.

Bemerkung

Bei Diagonalmatrizen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

entspricht der Zeilen- bzw. Spaltenrang der Anzahl der Elemente von $\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \lambda_i \neq 0\}$.

2.4.4 Definition

Unter einer *elementaren* Zeilen- bzw. Spaltenumformung versteht man eine Operation folgender Art:
Addiere zur i-ten Zeile (bzw. Spalte) das λ-fache der j-ten Zeile (bzw. Spalte).

2.4.5 Satz

Elementare Umformungen lassen den Rang einer Matrix unverändert.

2.4.6 Satz

Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ lässt sich durch elementare Umformungen auf die Gestalt $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bringen, wobei r der Rang von A ist.

Beispiel

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{(*)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{(**)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{(***)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(*) Von der zweiten Zeile wird die erste abgezogen
(**) Von der zweiten Spalte wird die erste abgezogen
(***) Die letzte Spalte wird mit $-\frac{1}{2}$ multipliziert

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{(*)}{\rightsquigarrow}$$

$$\underset{(*)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(*) Zur ersten Zeile wird die zweite Zeile addiert

2.5 Determinanten

2.5.1 Definition

Die *Determinante* $\det A$ einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist definiert als

$$\det A = |A| = \sum_{\pi \text{ Perm.}} \operatorname{sign}(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi(n)}$$

wobei

$$\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^{\left|\{(i,j) | i<j \wedge \pi(j)<\pi(i)\}\right|} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i}$$

2.5.2 Satz

a) $\det I = \det(e_1|\dots|e_n) = 1$

b) det ist in jeder Spalte linear, d.h.

$$\det(a_1|\dots|a_{j-1}|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i b_i|a_{j+1}|\dots|a_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\lambda_1 \det(a_1|\dots|a_{j-1}|b_i|a_{j+1}|\dots|a_n)$$

c) $\det(a_1|\dots|a_i|\dots|a_j|\dots|a_n) = -\det(a_1|\dots|a_j|\dots|a_i|\dots|a_n)$

d) $\det A^T = \det A$
Daraus folgen analoge Aussagen für Zeilen (z.B. ist det auch in jeder Zeile linear).

e) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

2.5.3 Satz

a) Ist ein Spaltenvektor von A gleich 0, dann ist auch $\det A = 0$ (folgt aus Satz 2.5.2b).

b) Sind zwei Spaltenvektoren gleich, dann ist auch $\det A = 0$ (folgt aus Satz 2.5.2c).

c) Die Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Spalte ein Vielfaches einer *anderen* Spalte dazuzählt.

$$\det(a_1|\dots|\underbrace{a_i + \lambda a_j}_{\text{i-te Spalte}}|\dots|a_n) = \det(a_1|\dots|a_n) + \underbrace{\lambda\det(a_1|\dots|\underbrace{a_j}_{\text{i-te Spalte}}|\dots)}_{=0}$$

d) a), b), c) gelten analog für Zeilen.

Notation

$\tilde{A}_{ij}$ entsteht aus A durch entfernen der i-ten Zeile und j-ten Spalte.
$\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$

2.5.4 Satz (Entwicklungssatz für Determinanten)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) $\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det \tilde{A}_{ij}$ (Entwicklung nach i-ter Zeile)

b) $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det \tilde{A}_{ij}$ (Entwicklung nach j-ter Spalte)

Man kann Determinanten also rekursiv berechnen.

Beispiel

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot\underbrace{\det(\tilde{A}_{11})}_{\det(a_{22})} - a_{21}\cdot\underbrace{\det\tilde{A}_{21}}_{\det(a_{12})} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Beispiel

Für 3×3-Matrizen bei Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\det A = a_{11}\cdot\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21}\cdot\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31}\cdot\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Bemerkung

Berechnung von $\det A$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ erfordert $n!$ Summanden mit jeweils n-fachem Produkt.

2.5.5 Satz

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\det A \neq 0$

b) $\operatorname{rang} A = n$

c) $\ker A = \{0\}$ und $\operatorname{Bild} A = \mathbb{R}^n$

d) A beschreibt eine bijektive lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung

Wenn $\underbrace{\varphi}_{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und bijektiv, dann ist $\underbrace{\varphi^{-1}}_{A^{-1}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ebenfalls linear.

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= I_n = & A^{-1}A \\ \varphi\circ\varphi^{-1} &= \operatorname{id}\mathbb{R}^n = & \varphi^{-1}\circ\varphi \end{aligned}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

2.5.6 Definition

Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißen *regulär* (bzw. *nichtsingulär*), wenn $\det A \neq 0$. Für reguläre Matrizen A bezeichnet A^{-1} diejenige Matrix B mit $AB = I_n = BA$.

2.5.7 Satz (Inverse)

Die *Inverse* einer regulären Matrix A ist gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{\text{adj}}$$

wobei

$$A_{\text{adj}} = ((-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij})^T_{i,j=1,\ldots,n}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.5.8 Matrixinversion

Man startet bei der Matrixinversion mit der Blockmatrix $(A|I)$ (vgl. Beispiel unten), wobei A die Matrix ist, zu der die Inverse berechnet werden soll und I die Einheitsmatrix. Nun führt man so lange Zeilenoperationen auf beiden Matrizen parallel aus, bis auf der linken Seite die Einheitsmatrix steht. Auf der rechten Seite steht nun die inverse Matrix A^{-1}.

$$(A|I) \rightsquigarrow (E_1 A|E_1) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow (\underbrace{E_n E_{n-1} \ldots E_1 A}_{=I}|E_n \ldots E_1)$$

$$E_n \ldots E_1 A = I \Rightarrow A = E_1^{-1} \ldots E_n^{-1} \Rightarrow A^{-1} = E_n \ldots E_1$$

Beispiel

Die Ausgangsmatrix sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(*)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{(**)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{(***)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

(*) 3. Zeile - 2 x 1. Zeile

(**) 2. und 3. Zeile tauschen
(***) 2. Zeile + 2 x 3. Zeile und 1. Zeile - 3. Zeile
Also ist die Inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.6 Lineare Gleichungssysteme

Ein *lineares Gleichungssystem* ist ein Gleichungssystem mit m linearen Gleichungen in n Variablen der Form:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Dieses lässt sich kürzer schreiben als:

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \qquad Ax = b \in \mathbb{R}^m$$

wobei

$$A = (a_{ij}) \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist: L = $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\}$
Die Lösungsmenge kann

- leer sein
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow L = \emptyset$$
- nicht eindeutig sein
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow L = \{\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

2.6.1 Definition (Homogenes System)

$Ax = b$ heißt *homogen*, wenn $b = 0$.
$Ax = 0$ ist das zu $Ax = b$ gehörige *homogene System*.

2.6.2 Satz

Wenn $A\hat{x} = b$, dann $L = \{\hat{x} + x | Ax = 0\}$.

$$\begin{aligned} &Ax = 0 \Rightarrow A(\hat{x} + x) = A\hat{x} + Ax = b + 0 = b \\ &A\hat{x} = Ay = b \Rightarrow A(\hat{x} - y) = A\hat{x} - Ay = b - b = 0 \\ &-(\hat{x} - y) \in \ker A \\ &y = \hat{x} + (-\hat{x} + y) \end{aligned}$$

2.6.3 Satz

$Ax = b$ hat eine Lösung $\Leftrightarrow$ b ist eine Linearkombination der Spalten der Matrix $A \Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A|b)$
$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$: $Ax = b$ ist eindeutig lösbar $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = n = \text{rang}(A|b)$

2.6.4 Satz (Cramersche Regel)

Sei A eine invertierbare $n \times n$ Matrix und es sei $Ax = b$, dann ist

$$x_k = \frac{\det(a_1|\dots|a_{k-1}|b|a_{k+1}|\dots|a_n)}{\det A}$$

Beweis

$$x = A^{-1} \cdot b \overset{\text{Satz 2.5.7}}{=} \frac{1}{\det A} \cdot A_{\text{adj}} \cdot b$$

Erinnerung: $(A_{\text{adj}})_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(\tilde{A}_{ji})$

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot (A_{\text{adj}})_{ki} \cdot b_i \\ &= \frac{1}{\det A} \cdot \det(a_1|\dots|a_{k-1}|b|a_{k+1}|\dots|a_n) \end{aligned}$$

(Entwicklung nach k-ter Spalte nach Satz 2.5.4b)

2.6.5 Gaußsches Eliminationsverfahren für Ax = b

Durch eine Folge von Zeilenumformungen lässt sich dieses System in eines der Form

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

umformen (das abgebildete System erhält man für ein quadratisches A).
Hier ist dann

$$x_n = u_{nn}^{-1} \cdot v_n$$

und allgemein

$$x_k = u_{kk}^{-1} \cdot \left(v_k - \sum_{i=1}^{n-k} u_{ki} x_{k+1} \right)$$

$$u_{kk} x_k + \sum_{i=1}^{n-k} u_{ki} x_{k+i} = v_k$$

Falls ein $u_{kk} = 0$, dann wähle x_k als Parameter.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 0 & -40 & 26 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 0 & -40 & 26 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -\frac{93}{40} \end{pmatrix}$$

$$x_3 = -\frac{93}{2}$$
$$x_2 = -30$$
$$x_1 = 2 + 8 \cdot 30 - \frac{4 \cdot 93}{2} = 480 - 186 = 294$$

2.7 Eigenwerte (und quadratische Formen)

2.7.1 Definition (Eigenwert, Eigenvektor)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert*, wenn $\lambda x = Ax$ eine von 0 verschiedene Lösung besitzt. Ein $x \neq 0$ mit $\lambda x = Ax$ heißt ein *zu λ gehöriger Eigenvektor*.

$$\lambda x = Ax \Leftrightarrow (\lambda I - A)x = 0$$

Also: λ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow (\lambda I - A)$ ist nicht invertierbar $\Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0$

2.7.2 Charakteristisches Polynom

$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ ist ein Polynom n-ten Grades (auch „charakteristisches Polynom“ genannt).
Nach C.F. Gauß hat das charakteristische Polynom n komplexe Nullstellen, d.h. $P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n)$ wobei manche der λ_i gleich sein können.
Also gibt es eine Basis von Eigenvektoren.

Bemerkung

Wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dann ist $P_A(\overline{\lambda}) = \overline{P_A(\lambda)}$, also: λ ist Eigenwert $\Leftrightarrow$ $\overline{\lambda}$ ist Eigenwert.

2.7.3 Satz

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad \text{(Spur von A)}$$
$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A$$

2.7.4 Satz

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann sind die Eigenwerte von A^k die Zahlen $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ ($A^k x = A^{k-1}\lambda x = \lambda A^{k-1}x = \lambda A^{k-2}\lambda x = \dots = \lambda^k x$) und wenn A regulär ist, dann hat A^{-1} die Eigenwerte $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$.

2.7.5 Satz

Wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dann müssen nicht alle Eigenwerte von A reell sein. Wenn λ Eigenwert von A ist, dann ist $\overline{\lambda}$ auch Eigenwert von A.

Beispiel

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ (Drehung um Winkel φ) hat reelle Eigenwerte $\Leftrightarrow \varphi \in \mathbb{Z}\pi$.

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_A(A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 0 & 1 \\ -1 & \lambda - 0 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

i und $-i$ sind die Eigenwerte von A.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ &= \lambda^2 - \text{ Spur}(A) \cdot \lambda + \det(A) \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\text{Spur } (A) \pm \sqrt{\text{Spur } (A)^2 - 4\det(A)}\right)$$

A hat reele Eigenwerte $\Leftrightarrow$ Spur $(A)^2 \geq 4\det(A)$

2.7.6 Satz

Die zu einem Eigenwert λ von A gehörigen Eigenvektoren sind die von 0 verschiedenen Lösungen von $(\lambda I - A)x = 0$.

2.7.7 Definition (Ähnliche Matrizen)

$A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißen *ähnlich*, wenn eine reguläre Matrix T existiert mit

$$T^{-1}AT = B$$

2.7.8 Satz

Ähnliche Matrizen besitzen das gleiche charakteristische Polynom.

Beweis

$$\begin{aligned}P_B(\lambda) &= \det(\lambda I - B) = \det(\underbrace{\lambda I}_{T^{-1}\lambda IT} - T^{-1}AT) = \det(T^{-1}(\lambda I - A)T)\\ &= \underbrace{\det(T^{-1})}_{\frac{1}{\det T}} \cdot \det(\lambda I - A) \cdot \det(T) = \det(\lambda I - A)\end{aligned}$$

2.7.9 Definition (Dreiecksmatrix)

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt *obere bzw. untere Dreiecksmatrix* $\Leftrightarrow a_{ij} = 0$ für $i > j$ bzw. $i < j$.

2.7.10 Satz

Wenn A eine Dreiecksmatrix ist, dann ist $\det(\lambda I - A) = \prod\limits_{i=1}^{n}(\lambda_i - a_{ii})$.
Also sind die Eigenwerte von A genau die Diagonalelemente.

2.7.11 Satz

Wenn eine reguläre Matrix T existiert mit $T^{-1}AT = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ (d.h. T diagonalisierbar ist), dann ist $T(e_i)$ ein Eigenvektor zu λ_i.

Beweis

$$T^{-1}ATe_i = \lambda_i e_i \Leftrightarrow ATe_i = T\lambda_i e_i = \lambda_i Te_i$$

Beispiel einer nicht diagonalisierbaren Matrix

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ P_A(\lambda) &= \det\begin{pmatrix}\lambda - 1 & -1\\ 0 & \lambda - 1\end{pmatrix} = (\lambda-1)^2 - 0 = (\lambda-1)^2\end{aligned}$$

D.h. 1 ist einziger Eigenwert der Matrix.
$Ax = x$, d.h. (Eigenvektoren zum Eigenwert 1)

$$\begin{aligned}&x + y = x \Leftrightarrow y = 0\\ &0 + y = y\end{aligned}$$

Also sind die einzigen Eigenvektoren zum Eigenwert 1 die Vielfachen von $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und somit existiert keine Basis für $\mathbb{R}^2$, die nur aus Eigenvektoren zu 1 besteht. Deswegen ist A nicht diagonalisierbar.

2.7.12 Definition

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

- A heißt *symmetrisch* $\Leftrightarrow A = A^T \qquad (a_{ij} = a_{ji})$
- A heißt *orthogonal* $\Leftrightarrow A^T = A^{-1}$ (Die Zeilenvektoren von A bilden eine ONB)

Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

- A heißt *hermitesch* $\Leftrightarrow A = A^*$ wobei $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$
- A heißt *unitär* $\Leftrightarrow A^* = A^{-1}$

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

- A symmetrisch $\Leftrightarrow$ A hermitesch
- A orthogonal $\Leftrightarrow$ A unitär

2.7.13 Satz

Für symmetrische $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt es eine orthogonale Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ in Diagonalform ist.

Bemerkung

Für symmetrische 2×2-Matrizen A suche die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren.

2.7.14 Definition

Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei

$$Q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto x^T Ax = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

A ist *positiv (bzw. negativ) definit* wenn $Q_A(x) > 0$ (bzw. $Q_A(x) < 0$) für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.
Wenn Q_A echt positive und echt negative Werte annimmt, so heißt A *indefinit.*

Beispiel

$Q_I(x) = \|x\|^2 = \sum x^2$

Bemerkung

Sei A symmetrisch und

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = S^{-1}AS$$

Dann gilt:

- A ist positiv definit $\Leftrightarrow$ alle $\lambda_i > 0$
- A ist negativ definit $\Leftrightarrow$ alle $\lambda_i < 0$
- A ist indefinit $\Leftrightarrow \exists\, i, j \quad \lambda_i < 0 < \lambda_j$

2.7.15 Satz (Kriterium von Hurwitz)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch.

A ist positiv definit $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$

Beispiel

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & b \\ b & a_{22} \end{pmatrix}$ ist positiv definit $\Leftrightarrow a_{11} > 0$ und $\det A > 0$.

Kapitel 3

Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher

Kleine Beispiele

$$f(x, y) = \sin x \cdot \cos y$$
$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

3.1 Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\} \text{ Vektorraum über } \mathbb{R}$$

Euklidische Norm

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Es gilt:

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Beweis zu (iii)

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\
&\Leftrightarrow (x+y)\cdot(x+y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\
&\Leftrightarrow \underbrace{x\cdot x}_{\|x\|^2} + \underbrace{y\cdot y}_{\|y\|^2} + \underbrace{x\cdot y + y\cdot x}_{2\cdot x\cdot y} = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\
&\Leftrightarrow \underbrace{x\cdot y}_{\substack{\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\alpha \quad (\cos\alpha\leq 1) \\ \alpha \text{ ist der eingeschlossene Winkel}}} \leq \|x\|\cdot\|y\|
\end{aligned}$$

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: $|xy| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

3.1.1 Definition

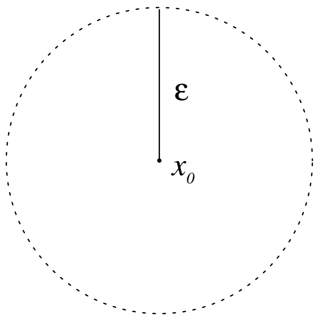


Abbildung 3.1: ε-Umgebung von x_0

Ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$, so heißt

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

ε-Umgebung von x_0.
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Umgebung von x, wenn $\exists\, \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \subseteq U$

3.1.2 Definition

- $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt *innerer Punkt* von $M \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn $\exists\, \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x_0) \subseteq M$.
- $\overset{\circ}{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \subseteq M\}$ ist die Menge der inneren Punkte von M.
- $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt *Randpunkt* von $M \subseteq \mathbb{R}^n$, falls in jeder ε-Umgebung von x_0 sowohl Elemente von M als auch Elemente von $\mathbb{R}^n \setminus M$ liegen. Wir schreiben ∂M für die Menge der Randpunkte von M.
- $\overline{M} = \overset{\circ}{M} \cup \partial M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, y \in M \quad \|x - y\| < \varepsilon\}$ heißt *Abschluss* von M.

Beispiel

$$]0,1[\, \cup\,]1,2] =: M \subseteq R$$

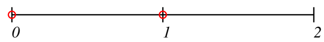


Abbildung 3.2: Die Menge $]0,1[\, \cup\,]1,2]$

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{M} &=]0,1[\cup]1,2[\\
\partial M &= \{0,1,2\} \\
\overline{M} &= [0,2] \\
\overset{\circ}{\overline{M}} &=]0,2[\qquad \text{(1 ist innerer Punkt von } \overline{M}\text{)}
\end{aligned}$$

3.1.3 Definition

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

- M heißt *offen* $\Leftrightarrow M = \overset{\circ}{M} \Leftrightarrow \forall\, x \in M\ \exists\, \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \subseteq M$
- M heißt *abgeschlossen* $\Leftrightarrow \overline{M} = M$
  $(\Leftrightarrow \overline{M} \subseteq M \Leftrightarrow \overset{\circ}{M} \cup \partial M \subseteq M$ da $\overset{\circ}{M} \subseteq M \wedge \partial M \subseteq M)$
- M heißt *beschränkt* $\Leftrightarrow \exists\, r \geq 0\ \forall\, x \in M \quad \|x\| \leq r$ (äquivalent: $\exists\, r \geq 0 \quad M \subseteq U_r(\vec{0})$)
- M heißt *kompakt* $\Leftrightarrow$ M ist abgeschlossen und beschränkt

Beispiele

- $[0,1[$ ist beschränkt, aber nicht abgeschlossen, also auch nicht kompakt
- $]-\infty,0]$ ist abgeschlossen, aber nicht beschränkt
- $\{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq 1\}$ ist kompakt

3.1.4 Definition (Folge)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = y \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N\ \forall\, n \geq N\ \|x_n - y\| < \varepsilon$$

3.1.5 Satz

Die Folge $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ konvergiert gegen $y \Leftrightarrow$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = y_i$.

3.1.6 Definition (Funktion in n reellen Variablen)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$, so heißt f *Funktion in n reellen Variablen.*

Beispiele

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$g(x, y) = \sin x \cdot \sin y$$
$$h(x, y) = x \cdot y$$

Spezialfall (Ebene) $ax + by + cz = d$
Wenn $c \neq 0$, dann $z = \frac{d-ax-by}{c}$
Ebenen sind typischerweise gegeben durch: $e(x, y) = \tilde{a}x + \tilde{b}y + \tilde{c}$
(siehe später: Tangentialebene)

Graph und Niveaulinie $f : D \to \mathbb{R} \quad (D \subseteq \mathbb{R}^n)$
$\Gamma(f) = \{(x, f(x))|x \in D\} \in \mathbb{R}^{n+1}$ *(Graph von f)*
$N_c(f) = \{x \in D|f(x) = c\} = f^{-1}(c)$ *(Niveaulinie zur Höhe c)*

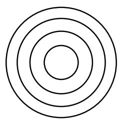


Abbildung 3.3: Niveaulinien der Funktion $f(x) = \|x\|$

3.1.7 Definition (Häufungspunkt)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *Häufungspunkt* von M, wenn in jeder ε-Umgebung von x unendlich viele Punkte aus M liegen.

Bemerkung

Äquivalent dazu: In jeder ε-Umgebung von x liegt ein von x verschiedener Punkt in M.

Beweis $\Rightarrow$: trivial, $\Leftarrow$:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon, \qquad x_1 \in U_{\varepsilon_1}(x) \cap M \setminus \{x\},$$
$$\varepsilon_2 = \min(\|x_1\|, \frac{1}{2}), \qquad x_2 \in U_{\varepsilon_2}(x) \cap M \setminus \{x\},$$
$$\ldots,$$
$$\varepsilon_n \leq \frac{1}{n}, \qquad x_n \in U_{\varepsilon_n}(x) \cap M \setminus \{x\},$$
$$\varepsilon_{n+1} = \min(\|x_n\|, \frac{1}{n+1}), \qquad x_{n+1} \in U_{\varepsilon_{n+1}}(x) \cap M \setminus \{x\}$$

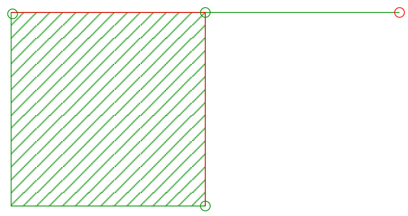
Alle x_i sind verschieden und $\{x_n|n \in \mathbb{N}\} \subseteq U_\varepsilon(x)$.

Wichtig

Wenn x ein Häufungspunkt von M ist, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $M\backslash\{x\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Beispiel

1.
$$\begin{aligned} M &= ([0,1[\times[0,1[) \cup ([1,2[\times\{1\}) \\ H(M) &= ([0,1]\times[0,1]) \cup ([1,2]\times\{1\}) \end{aligned}$$



2. $M = [0,1[\cup\{2\} \qquad H(M) = [0,1]$

3.1.8 Definition (Funktionsgrenzwert)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $a \in H(D)$ und $b \in \mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow$ für **jede** Folge (x_n) in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Beispiel

Sei $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1,x_2) = \frac{x_1^2x_2^2}{x_1^2+x_2^2} \qquad g(x_1,x_2) = \frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}$$

Funktion f Sei $(x_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit Grenzwert $(0,0)$, d.h. $\lim x_k = 0 = \lim y_k$.

$$|f(x_k,y_k)| = \frac{x_k^2y_k^2}{x_k^2+y_k^2} \leq \frac{x_k^2y_k^2}{x_k^2} = y_k^2 \qquad (x_k \neq 0)$$

$$|f(x_k,y_k)| = \frac{x_k^2y_k^2}{x_k^2+y_k^2} \leq \frac{x_k^2y_k^2}{y_k^2} = x_k^2 \qquad (y_k \neq 0)$$

Daraus folgt: $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k,y_k) = 0$, weil $\lim x_k^2 = 0 = \lim y_k^2$.
Also: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Funktion g Sei z_k mit $\lim z_k = 0, z_k \neq 0$

$$\lim_{k\to\infty} g(z_k, 0) = \lim_{k\to\infty} \frac{z_k^2 - 0^2}{z_k^2 + 0^2} = 1$$

$$\lim_{k\to\infty} g(0, z_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{0^2 - z_k^2}{0^2 + z_k^2} = -1$$

Also existiert der Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ nicht.

3.1.9 Definition (Stetigkeit)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $a \in D$.

- f heißt *stetig in a* $\Leftrightarrow$ für <u>alle</u> Folgen (x_n) in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$
- f ist stetig auf $M \subseteq D \Leftrightarrow f$ ist in allen $a \in M$ stetig
- f ist stetig auf $D \Leftrightarrow f$ ist in allen $a \in D$ stetig

Bemerkung

Man kann zeigen, dass gilt:

$$\begin{aligned}
&f \text{ ist in } a \text{ stetig}\\
&\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall x \in D \cap U_\varepsilon(a) \quad f(x) \in U_\varepsilon(f(x))\\
&\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall x \in D \quad \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon
\end{aligned}$$

3.1.10 Satz (Rechenregeln für stetige Funktionen)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$. Wenn f und g in $a \in D$ stetig sind, dann auch $c \cdot f$ $(c \in \mathbb{R})$, $f + g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (sofern $g(a) \neq 0$).

3.1.11 Satz (Wichtig)

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und nichtleer. Dann existieren für jede stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ Elemente $a, b \in K$, so dass

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \qquad \forall x \in K$$

3.2 Differentiation von Funktionen auf $\mathbb{R}^n$

Eine analoge Vorgehensweise zur Differentiation in $\mathbb{R}$ ist nicht möglich:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f : D \to \mathbb{R} \quad D \subseteq \mathbb{R}^3$$

Problem: In $\mathbb{R}^n$ gibt es keine Division.

3.2.1 Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Für $x \in \overset{\circ}{D}$ sei

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = D_k f(x) = \lim_{h\to 0,\ h\neq 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k+h,x_{k+1},\ldots,x_n)-f(x)}{h}$$

$D_k f(x)$ heißt *k-te Richtungsableitung* im Punkt x, falls existent.

$$\operatorname{grad}(f)(x) = (D_1 f(x), \ldots, D_n f(x))$$

Bemerkung

$\vec{h} \mapsto \operatorname{grad}(f)(x)\cdot\vec{h} + f(x)$ (Tangential-)Ebene (falls sie existiert)

Warnendes Beispiel

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x,y>0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{0}{h} = 0 = D_2 f(0,0)$$

In $(0,0)$ existieren die Richtungsableitungen, aber f hat in $(0,0)$ keine Ableitung.

Beispiel

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$D_1 f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \qquad (\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0)$$

$$D_2 f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2} \qquad (\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0)$$

$$D_2 D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = 1$$

$$D_1 D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_2 f(0,h) - D_2(0,0)}{h} = \frac{0}{h^2} = 0$$

Im Allgemeinen ist also die Reihenfolge der partiellen Ableitung relevant.

3.2.2 Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x \in H(D)$.
Dann heißt $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *Ableitung von f an der Stelle x*, wenn eine Funktion $g : D \to \mathbb{R}$ existiert, so dass

1. $f(x+h) = f(x) + \underbrace{A \cdot h}_{\sum_{i=1}^{n} a_i h_i} + \|h\| \cdot g(h)$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $x + h \in D$
2. $\lim\limits_{h \to 0} g(h) = 0$

Erläuterung

$h \mapsto \underbrace{f(x) + Ah}_{T_x(h)}$ ist die Tangentialebene an der Stelle x. $g(h) = \frac{f(x+h) - T_x(h)}{\|h\|}$

T_x ist die beste lineare Approximation an f im Punkt x, denn (2) heißt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, h\ \|h\| < \delta \Rightarrow \frac{|f(x+h) - T_x(h)|}{\|h\|} \leq \varepsilon$$

Eine äquivalente Umformung ist:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, h\ \|h\| < \delta \Rightarrow |f(x+h) - T_x(h)| \leq \varepsilon \|h\|$$

Setze $h_\delta = (0, \dots, \underbrace{\delta}_{\text{i-te Stelle}}, \dots 0)$:

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + a_i \delta + |\delta| \cdot g(\delta) \\
\frac{f(x+h) - f(x)}{\delta} &= a_i + \frac{|\delta|}{\delta} \cdot g(\delta) \\
\text{Für } \delta \to 0 : \underbrace{\frac{f(x+h_\delta) - f(x)}{\delta}}_{\to D_i f(x)} &= a_i + \underbrace{\frac{|\delta|}{\delta} \cdot g(\delta)}_{\to 0}
\end{aligned}$$

Also: $a_i = D_i f(x)$

Warnung

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x, y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\operatorname{grad}(f)(0,0) = (0,0)$$

$\operatorname{grad}(f)(0,0)$ existiert, aber f ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

$$\frac{f(\vec{h}) - f(\vec{0}) - \vec{0} \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} = g(\vec{h}) = \frac{f(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}$$

Die Folge $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \vec{h}_n$ konvergiert gegen $\vec{0}$, aber $\lim\limits_{h \to 0} g(\vec{h}) \neq 0$, da

$$g(\vec{h}_n) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}} = \frac{n}{\sqrt{2}} \to \infty$$

3.2.3 Satz

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in \overset{\circ}{D}$. Wenn auf einer offenen Umgebung von x alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind, dann ist f in x differenzierbar und es gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \operatorname{grad}(f)(x)}{\|h\|} = 0$$

3.2.4 Satz

Wenn f in x differenzierbar ist, dann ist f in x stetig.

Beweis

f in x stetig $\Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} f(x+h) - f(x) = 0$:

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x) = \lim_{h \to 0} \underbrace{A \cdot h}_{\to 0} + \|h\| \cdot \underbrace{g(h)}_{\to 0} = 0$$

3.2.5 Satz

Sind f und g an der Stelle x differenzierbar, dann auch $f+g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (wenn $g(x) \neq 0$).

Beispiel

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\| \qquad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

$$D_i f(x) = \frac{1}{2} \frac{2x_i}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}}$$

$$\operatorname{grad}(f)(x) = \frac{x}{\|x\|} \qquad (x \neq 0)$$

Für $x = 0$ existieren schon die partiellen Ableitungen nicht.
f ist überall stetig.

Zusammenfassung

Wenn $\operatorname{grad}(f)$ in einer offenen Umgebung von x existiert und stetig ist, dann ist f in x differenzierbar und $h \mapsto f(x) + \operatorname{grad}(f)(x) \cdot h$ beschreibt die Tangentialebene.
Im Beispiel: Für $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ ist die Tangentialebene gegeben durch:

$$\left(x_1, x_2, \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) + \left(\underbrace{\lambda, \mu}_{h}, \frac{\lambda x_1 + \mu x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right)$$

Allgemeine Form:

$$\{(x, f(x)) + (h, \operatorname{grad}(f)(x) \cdot h) \mid h \in \mathbb{R}^n\}$$

3.2.6 Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (*Vektorfeld*), dann heißt

$$J(f)(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad}(f_1)(x) \\ \vdots \\ \operatorname{grad}(f_m)(x) \end{pmatrix} = (D_j f_i(x))_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \qquad \text{Jacobimatrix}$$

Wenn alle $D_j f_i$ in einer Umgebung von x existieren und stetig sind, dann gilt für die Fehlerfunktion $g(h) = \frac{f(x+h)-f(x)-J(f)(x)\cdot h}{\|h\|}$, dass $\lim\limits_{h\to 0} g(h) = \vec{0}$.

$$J(f)(x) = Df(x) = (D_j f_j(x))_{ij} \qquad (\textit{totales Differential})$$

Die Tangentialebene am Punkt $(x, f(x))$ berechnet sich wie folgt:

$$T_x(h) = J(f)(x) \cdot h + f(x)$$

3.2.7 Satz

Sei $f : D_f \to \mathbb{R}^m$ wobei $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$, $g : D_g \to \mathbb{R}^k$ wobei $D_g \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\operatorname{Bild}(f) \subseteq D_g$. Wenn f in x und g in $f(x)$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f$ in x differenzierbar und es gilt

$$J(g \circ f)(x) = J(g)(f(x)) \underbrace{\cdot}_{\text{Matrixmultiplikation}} J(f)(x)$$

D.h.

$$\begin{aligned} D_i(g\circ f)(x)_k &= \sum_{j=1}^{n} D_j g_k(f(x))_k \cdot D_i f_j(x) = \\ &= J(g\circ f)(x)_{ki} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} J(g)(f(x))_{kj} \cdot J(f)(x)_{ji}}_{(J(g)(f(x))\cdot J(f)(x))_{ki}} \end{aligned}$$

Spezialfall

$$\begin{aligned} &f : D \to \mathbb{R} && D \subseteq \mathbb{R}^n \\ &p : I \to \mathbb{R}^n && I \subseteq \mathbb{R} \qquad \operatorname{Bild}(p) \subseteq D \end{aligned}$$

$$f \circ p : I \to \mathbb{R}$$

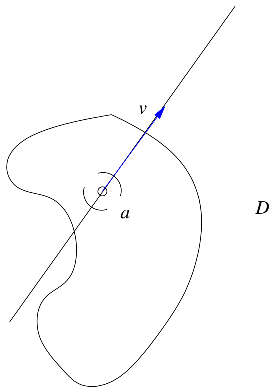
$$\begin{aligned} (f\circ p)'(x) &= J(f)(p(x)) \cdot J(p)(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{D_i f(p(x))}_{J(f)(p(x))_{1i}} \cdot \underbrace{p_i'(x)}_{J(p)(x)_{i1}} \\ &= \operatorname{grad}(f)(p(x)) \cdot p'(x) \end{aligned}$$

3.3 Richtungsableitung, Satz von Taylor, lokale Extrema

$$f : D \to \mathbb{R} \quad (D \subseteq \mathbb{R}^n) \qquad v \in \mathbb{R}^n \quad \|v\| = 1 \qquad a \in \mathbb{R}^n$$

f ist in einer Umgebung von a differenzierbar.
Es gibt ein Intervall I (um $0 \in \mathbb{R}$) mit

$$a + \lambda v \in D \quad \text{für alle } \lambda \in I$$



$$p : I \to \mathbb{R} : \lambda \mapsto f(p(\lambda))$$

$$f \circ p : I \to \mathbb{R}$$

$$(f \circ p)'(0) = \underbrace{\text{grad } f(a)}_{p(a)} \cdot \underbrace{v}_{p'(0)} = \text{grad } f(a) \cdot v$$

Ableitung von f an der Stelle a in Richtung v:

$$D_v(f)(a) = \text{grad } f(a) \cdot v$$

Bemerkung

$$D_{e_i}(f)(a) = D_i f(a)$$

$D_v f(a) = \text{grad } f(a) \cdot v$ wird am größten für $v = \frac{\text{grad } f(a)}{\|\text{grad } f(a)\|}$ (Richtung des stärksten Anstieges).

Beispiel

$$f(x) = \|x\| \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{grad } f(x) = \frac{x}{\|x\|} \qquad (x \neq 0)$$

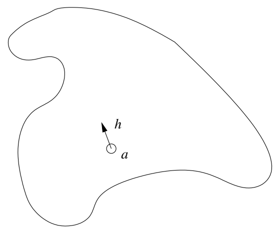
(in 0 ist der Anstieg in allen Richtungen gleich)

3.3.1 Satz von Taylor für Funktionen mehrerer reeller Variablen

$$f : D \to \mathbb{R} \quad D \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen} \qquad a \in D \qquad h \in \mathbb{R}^n$$

f sei (m+1)-mal differenzierbar.

$$a + \theta \cdot h \in D \qquad \text{für } \theta \in [0,1]$$



$$g(\lambda) = f(a + \lambda h) \qquad g : [0,1] \to \mathbb{R}$$

Taylorentwicklung für g im Punkt 1:

$$f(a+h) = g(1) = \sum_{k=0}^{m} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} 1^k + R_m(1,0)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \underbrace{\frac{g^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}}_{\text{Lagrangesches Restglied}} \qquad (\text{für ein } 0 \leq \theta \leq 1)$$

Es gilt (zu zeigen mit Induktion über k, siehe Beweis weiter unten):

$$g^{(k)}(\theta) = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i D_i \right)^k (f)(x + \theta h)$$

Also ist die Taylorentwicklung von f am Entwicklungspunkt $x \in D$:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^{n} h_i D_i \right)^k (f)(x) + \underbrace{R_m(x,h)}_{\frac{1}{(m+1)!} \left(\sum_{i=1}^{n} h_i D_i \right)^{m+1} (f)(x+\theta h) \text{ für ein } \theta \in [0,1]}$$

In anderer Schreibweise, analog zur Taylorreihe im ersten Kapitel: Taylorentwicklung von f am Entwicklungspunkt $x_0 \in D$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^{n} (x - x_0)_i D_i \right)^k (f)(x_0) + R_m(x, x_0)$$

mit

$$R_m(x,h) = \frac{1}{(m+1)!} \left(\sum_{i=1}^{n} (x - x_0)_i D_i \right)^{m+1} (f)(x + \theta(x - x_0)) \text{ für ein } \theta \in [0,1]$$

Beweis

Durch Induktion über k zeigen wir:

$$g^{(k)}(\theta) = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i D_i\right)^k (f)(x + \theta h)$$

Induktionsanfang: Für $k = 0$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} h_i D_i\right)^0 (f)(x + \theta h) = f(x + \theta h) = g(\theta) = g^{(0)}(\theta)$$

Induktionsschritt: $k \to k + 1$:

$$\begin{aligned}
g^{(k+1)}(\theta) = (g^{(k)})'(\theta) \overset{\text{I.H.}}{=} \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} h_i D_i\right)^k (f)(x+\theta h)}{d\theta} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \\
&= \sum_{j=1}^{n} D_j \left(\sum_{i=1}^{n} h_i D_i\right)^k (f)(x + \theta h) \cdot h_j \\
&= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} h_i D_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} h_i D_i\right)^k}_{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} h_i D_i\right)^{k+1}} (f)(x + \theta h)
\end{aligned}$$

3.3.2 Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar auf D, dann gilt

$$D_i D_j f = D_j D_i f \qquad \text{für } i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

Beispiel

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^{xy}$

$$D_1 f(x, y) = y \cdot e^{xy} \qquad D_2 f(x, y) = x \cdot e^{xy}$$

$$D_1 D_1 f(x, y) = y^2 \cdot e^{xy} \qquad D_2 D_2 f(x, y) = x^2 \cdot e^{xy}$$

$$D_2 D_1 f(x, y) = e^{xy} + xy \cdot e^{xy} = D_1 D_2 f(x, y)$$

$$\begin{aligned}
g''(h) &= \left(\sum_{j=1}^{2} h_i D_i\right)^2 (f)(x + h) = (h_1 D_1 + h_2 D_2)^2 (f)(x + h) \\
&= (h_1^2 D_1^2 + 2h_1 h_2 D_1 D_2 + h_2^2 D_2^2)(f)(x + h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k) &= e^{xy} + (hD_x + kD_y)(f)(x,y) + h^2 D_x^2 f(x,y) \\ &\quad + 2hkD_xD_y f(x,y) + k^2 D_y^2 f(x,y) \\ &= e^{xy} + hye^{xy} + kxe^{xy} + \frac{1}{2}\left(h^2y^2e^{xy} + k^2x^2e^{xy}\right) \\ &\quad + hk(e^{xy} + xye^{xy}) + R \quad \text{(Lagrangesches Restglied)} \end{aligned}$$

Für $x = y = 0$ erhalten wir: $1 + hk$
Dritte Ableitungen:

$$D_x^2 D_y f(x,y) = (2y + xy^2)\cdot e^{xy} \qquad D_x D_y^2 f(x,y) = (2x + x^2y)\cdot e^{xy}$$

$$D_x^3 f(x,y) = y^3 e^{xy} \qquad D_y^3 f(x,y) = x^3 e^{xy}$$

Restglied R, wobei $\bar{x} = x + \theta h$, $\bar{y} = y + \theta k$ für ein $\theta \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} R &= \frac{g^{(3)}(\theta)}{6} = \frac{(hD_x + kD_y)^3(f)(\bar{x},\bar{y})}{6} \\ &= \frac{h^3D_x^3 + 3h^2kD_x^2D_y + 3hk^2D_xD_y^2 + k^3D_y^3)(f)(\bar{x},\bar{y})}{6} \\ &= \frac{1}{6}e^{\bar{x}\bar{y}}\left(h^3\bar{y}^3 + 3h^2k(2\bar{y} + \bar{x}\bar{y}^2) + 3hk^2(2\bar{x} + \bar{x}^2\bar{y}) + k^3\bar{x}^3\right) \end{aligned}$$

3.3.3 Lokale Extrema

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $a \in D$. f hat in a ein *lokales* $\begin{matrix}\textit{Maximum}\\ \textit{Minimum}\end{matrix}$ genau dann, wenn:

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, x \in D \quad \|x - a\| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \substack{\leq \\ \geq} f(a)$$

Wichtig

Wenn f in a ein lokales Extremum besitzt, dann ist grad $f(a) = \vec{0}$.

Beweis Wenn f in a ein lokales Extremum besitzt, dann hat die Funktion $t \mapsto f(a + t\vec{e_i})$ in $\vec{0}$ ein lokales Extremum. Dann muss aber grad $f(a) \cdot \vec{e_i} = D_i f(a) = 0$ sein.

Hessematrix $\mathcal{H}(f)(a) = (D_{ij}f(a))_{i,j=1,\dots,n}$
Diese Matrix ist symmetrisch, wenn f zweimal stetig differenzierbar ist.

3.3.4 Satz

Wenn $\mathcal{H}(f)(a)$ positiv bzw. negativ definit ist, dann hat f in a ein lokales Minimum bzw. Maximum.
Wenn $\mathcal{H}(f)(a)$ indefinit ist, dann hat f in a einen Sattelpunkt, d.h.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x, y \in U_\varepsilon(a) \quad f(x) < f(a) < f(y)$$

Erläuterungen

Für $n = 2$ hat $\mathcal{H}(f)(a)$ zwei Eigenwerte λ_1, λ_2 (die auch gleich sein können).

$$\det \mathcal{H}(f)(a) = \lambda_1 \lambda_2$$

- $\mathcal{H}(f)(a)$ ist positiv oder negativ definit $\Leftrightarrow \det \mathcal{H}(f)(a) > 0$
  $\mathcal{H}(f)(a)$ ist positiv definit $\underset{\text{Hurwitzkrit.}}{\Longleftrightarrow}$ $\det \mathcal{H}(f)(a) > 0$ und $D_1^2 f(a) = \mathcal{H}(f)(a)_{11} > 0$
- $\mathcal{H}(f)(a)$ ist indefinit $\Leftrightarrow \det \mathcal{H}(f)(a) < 0$

Beispiele

1. $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y$

$$D_1 f(x, y) = \cos x \cdot \sin y \qquad D_2 f(x, y) = \sin x \cdot \cos y$$

$$\text{grad } (f)(x, y) = (0, 0) \Rightarrow x, y \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$$

Analyse im Punkt $(0, 0)$:

$$\text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$$

$$\mathcal{H}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin x \cdot \sin y & \cos x \cdot \cos y \\ \cos x \cdot \cos y & -\sin x \cdot \sin y \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathcal{H}(f))(0, 0) = -1$$

Also liegt in $(0, 0)$ ein Sattelpunkt vor.
Analyse im Punkt $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$$\mathcal{H}(f)(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathcal{H}(f))(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 1$$

Also ist $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ein Maximum (da alle Eigenwerte negativ sind).

2. $f(x, y) = x \cdot y$

$$D_1 f(x, y) = y \qquad D_2 f(x, y) = x$$

Kritischer Punkt: $(0, 0)$

$$\mathcal{H}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathcal{H}(f))(0, 0) = -1$$

Also liegt in $(0, 0)$ ein Sattelpunkt vor.

Bemerkung

Für $f(x,y) = xy^2$ funktioniert die Methode nicht:

$$D_1 f(x,y) = y^2 \qquad D_2 f(x,y) = 2xy$$

$$\mathcal{H}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow y = 0$$

$$(\mathcal{H}(f))(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathcal{H}(f))(x,0) = 0$$

Also ist das Kriterium nicht anwendbar.

Beispiel

Wir betrachten einen Quader mit konstantem Volumen $xyz = c > 0$. Wir nehmen wir, dass $x, y > 0$. z ist in Abhängigkeit von x und y darstellbar: $z = \frac{c}{xy}$. Die Oberfläche berechnet sich also mit:

$$O = f(x,y) = 2(xy + xz + yz) = 2(xy + \frac{c}{x} + \frac{c}{y})$$

Fragestellung „Welcher Quader mit Volumen c hat die kleinste Oberfläche?"

$$D_1 f(x,y) = 2y - \frac{2c}{x^2} \qquad D_2 f(x,y) = 2x - \frac{2c}{y^2}$$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow xy^2 = c \wedge x^2 y = c$$

$$\Rightarrow x^2 y = xy^2 \Rightarrow x = y \Rightarrow x = y = c^{\frac{1}{3}} = z$$

$$D_1^2 f(x,y) = \frac{4c}{x^3} \qquad D_2^2 f(x,y) = \frac{4c}{y^3} \qquad D_1 D_2 f(x,y) = 2$$

$$\mathcal{H}(f)(c^{\frac{1}{3}}, c^{\frac{1}{3}}) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathcal{H}(f)(c^{\frac{1}{3}}, c^{\frac{1}{3}}) = 16 - 4 = 12 > 0$$

Also hat $f(x,y)$ in $(c^{\frac{1}{3}}, c^{\frac{1}{3}})$ ein lokales Minimum.

Fragestellung „Warum ist $(c^{\frac{1}{3}}, c^{\frac{1}{3}}, c^{\frac{1}{3}})$ das globale Minimum?", d.h. „Warum ist $(c^{\frac{1}{3}}, c^{\frac{1}{3}})$ das globale Minimum von f auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x, y > 0\}$?"

Idee Sei $a > 0$. Wir betrachten f auf der Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a = xy \wedge x, y > 0\}$ (Wir betrachten also das Problem für eine fix gehaltene Grundfläche a).

$$g_a(x) := f(x, \frac{a}{x}) = 2(a + \frac{c}{x} + \frac{cx}{a})$$

$$g_a'(x) = 2\left(\frac{c}{a} - \frac{c}{x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$$

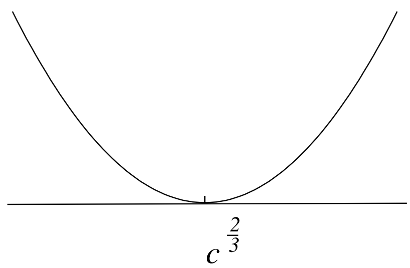
„Warum nimmt g_a sein Minimum in $\sqrt{a}$ an?“
Zu zeigen:

$$\begin{aligned}
g_a(\sqrt{a}) < g_a(x) &\Leftrightarrow 2\left(a + \frac{2c}{\sqrt{a}}\right) < 2\left(a + \frac{c}{x} + \frac{cx}{a}\right) \\
&\Leftrightarrow a + \frac{2c}{\sqrt{a}} < a + \frac{c}{x} + \frac{cx}{a} \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{a}} < \frac{1}{x} + \frac{x}{a} \\
&\Leftrightarrow 2x\sqrt{a} < a + x^2 \\
&\Leftrightarrow 0 < \underbrace{a - 2x\sqrt{a} + x^2}_{(x-\sqrt{a})^2} \\
&\Leftrightarrow x \neq \sqrt{a}
\end{aligned}$$

Also hat g_a sein globales Minimum in $\sqrt{a}$ für $a > 0$.
Sei $h(a) = g_a(\sqrt{a}) = 2\left(a + \frac{2c}{\sqrt{a}}\right)$
Wir zeigen: h hat sein globales Minimum in $c^{\frac{2}{3}}$:

$$h'(a) = 2(1 - \frac{c}{a^{\frac{3}{2}}})$$

$$h'(a) \lessgtr 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{c}{a^{\frac{3}{2}}} \lessgtr 0 \Leftrightarrow 1 \lessgtr \frac{c}{a^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow a^{\frac{3}{2}} \lessgtr c \Leftrightarrow a \lessgtr c^{\frac{2}{3}}$$



Also hat f sein globales Minimum in $(c^{\frac{1}{3}}, c^{\frac{1}{3}})$, da $\sqrt{c^{\frac{2}{3}}} = c^{\frac{1}{3}}$.

Fazit Also hat der Würfel mit dem Volumen c, also der Kantenlänge $c^{\frac{1}{3}}$ die kleinste Oberfläche.

3.4 Satz über implizite und inverse Funktionen, Extrema unter Nebenbedingungen

3.4.1 Satz (Implizite Funktionen)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen und $g : D \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar.
Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $(a,b) \in D$, $g(a,b) = 0$ und $\det D_{\vec{y}}g(a,b) \neq 0$ (d.h. $(D_{n+j}g_i(a,b))_{i,j=1,\ldots,n}$ ist invertierbar).
Dann existieren offene Umgebungen U und V von a bzw. b mit $U \times V \subseteq D$ und eine differenzierbare Funktion $f : U \to V$, so dass

1) $f(a) = b$

2) für alle $x \in U$ gilt:

   i) $g(x, f(x)) = 0$

   ii) $y = f(x)$ wenn $y \in V$ und $g(x,y) = 0$

Also löst f in einer Umgebung von (a,b) die Gleichung $g(x,y) = 0$ eindeutig nach y auf.
Wegen der Kettenregel gilt für $x \in U$:

$$Dg(x, f(x)) \cdot \left(\frac{I_n}{Df(x)} \right) = 0$$

also $D_{\vec{x}}g(x, f(x)) \cdot I_n + D_{\vec{y}}g(x, f(x)) \cdot Df(x) = 0$
(setze $x = a$ und beachte $b = f(a)$)
also $Df(a) = -D_{\vec{y}}g(a,b)^{-1} \cdot D_{\vec{x}}g(a,b)$

Beispiele

1.

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - r = 0 \qquad \text{(Kreisgleichung)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0$$

$$g(x, f(x)) = x^2 + f(x)^2 - r = 0$$

$$f'(x) = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

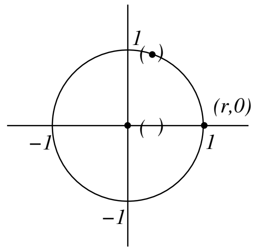
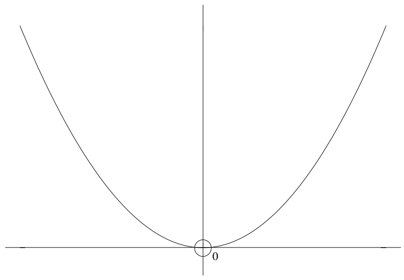


Abbildung 3.4: Für den Punkt $(r,0)$ ist die Auflösung nach y in keiner Umgebung eindeutig $(y = \pm\sqrt{r^2 - x^2})$.



2.

$$y = x^2 \qquad \text{(Parabel)}$$

$$g(x,y) = y - x^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(y,x) = -2x \qquad x \neq 0$$

$$g(y, f(y)) = 0$$

$$f'(y) = \frac{-1}{-2x} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2f(y)}$$

Offensichtlich ist $f'(y)$ die Ableitung der Wurzelfunktion bzw. ihrer Negation.

3.

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x - \sin y$$

$$x - \sin \underbrace{f(x)}_{\arcsin x} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\cos y \neq 0 \Leftrightarrow y \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$

$$\arcsin' x = f'(x) = y' = \frac{-1}{-\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1-x^2}}$$

(Das Vorzeichen hängt von der Umgebung ab.)

3.4.2 Satz (inverse Funktionen)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Wenn für ein $a \in D$ die Ableitung $Df(a)$ invertierbar ist, dann gibt es offene Umgebungen U und V von a bzw. b, so dass $U \subseteq D$ und $f : U \to V$ eine Bijektion ist mit differenzierbarer Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ und $Df^{-1}(b) = Df(a)^{-1}$.

Beweis (Skizze)

Betrachte $g : \mathbb{R}^n \times D \to \mathbb{R} : (y, x) \mapsto y - f(x)$. g ist stetig differenzierbar (da f stetig differenzierbar ist).
Es gilt

$$g(\underbrace{b}_{=f(a)}, a) = b - f(a) = f(a) - f(a) = 0$$

$$D_{\vec{x}}g(b, a) = -Df(a) \quad \text{(da } Df(a) \text{ invertierbar)}$$

Wegen des impliziten Funktionensatzes gibt es offene Umgebungen V und W von $f(a)$ bzw. a mit $V \times W \subseteq \mathbb{R}^n \times D$ und eine differenzierbare Funktion $h : V \to W$, so dass

1. $h(b) = a$ und
2. $\forall\, y \in V \quad (\exists^1\, x \in W \qquad \underbrace{g(y, x) = 0}_{y - f(x) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)} \qquad)$ und $g(y, h(y)) = 0$

wobei $x = h(y)$.
Mit $U = W \cap f^{-1}(V)$ erhält man eine Bijektion $h : U \to V$; da $f(h(y)) = y$ ist $h = f^{-1}$ auf V.
Aufgrund der Kettenregel gilt:

$$I_n = D(f \circ h)(y) = Df(h(y)) \cdot Dh(y)$$

Mit $y = b$ erhalten wir:

$$I_n = D|f(a)| \cdot Dh(b)$$

Also

$$Dh(b) = Df(a)^{-1}$$

Beispiel

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$Df(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det Df(r, \varphi) = r\cos^2\varphi + r \cdot sin^2\varphi = r$$

Also ist f lokal differenzierbar für $r \neq 0$.

Lokale Extrema unter Nebenbedingungen

Beispiel:

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad \text{Nebenbedingung (Einheitskreis)}$$

$$f(x,y) = xy$$

3.4.3 Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
Wenn f in $a \in D$ ein lokales Extremum unter Nebenbedingung $g(x) = 0$ hat und grad $g(a) \neq 0$, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (*Lagrangescher Multiplikator*) mit grad $f(a) = \lambda \cdot$ grad $g(a)$.

Beweis

o.B.d.A. sei $D_n g(a) \neq 0$; sei $a = (a', a_n)$. Wegen des impliziten Funktionensatzes existiert eine offene Umgebung U von a' und eine differenzierbare Funktion $h : U \to \mathbb{R}$ mit $h(a') = a_n$ und $g(x', h(x')) = 0$ für alle $x' \in U$.
Also hat $x' \mapsto f(x', h(x'))$ in a' ein lokales Extremum.
Also gilt für $1 \leq i < n$, dass

1. $D_i f(a) + D_n f(a) \cdot D_i h(a') = 0$
2. $D_i g(a) + D_n g(a) \cdot D_i h(a') = 0$

Wenn grad $f(a) = \lambda \cdot$ grad $g(a)$, dann $D_n f(a) = \lambda D_n g(a)$, also $\lambda = \frac{D_n f(a)}{D_n g(a)}$.
Für $1 \leq i < n$ gilt:

$$\begin{aligned} D_i f(a) &\underset{1.}{=} -D_n f(a) \cdot D_i h(a') \\ &\underset{2.}{=} D_n f(a) \cdot D_n g(a)^{-1} \cdot D_i g(a) \\ &= \lambda \cdot D_i g(a) \end{aligned}$$

Beispiel (von oben)

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$f(x,y) = xy$$

$$Dg(x,y) = (2x, 2y) \qquad Df(x,y) = (y, x)$$

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow |x| = |y|$$

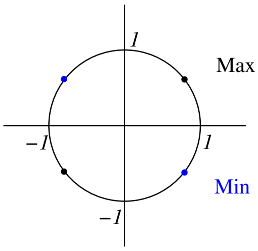
$$y = \lambda 2x \qquad x = \lambda 2y$$

$$x = 2\lambda y = 4\lambda^2 x \qquad y = 4\lambda^2 y$$

Also $4\lambda^2 = 1$, d.h. $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ und somit $x = y$ oder $y = -x$.
Also sind die lokalen Extrema:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{globale Maxima}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{globale Minima}$$



Wir wissen: $g^{-1}(0)$ ist kompakt, weil $g^{-1}(0)$ abgeschlossen und beschränkt ist. Also nimmt f auf $g^{-1}(0)$ einen größten und einen kleinsten Wert an.
Maximum kann in $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ oder $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sein und ist tatsächlich in beiden, da f dort den Wert $\frac{1}{2}$ annimmt (analog für Minima).

Beispiel

$$g(x, y, z) = x + y + z - U = 0 \qquad U \text{ konstant} \quad x, y, z \geq 0$$

$$f(x, y, z) = \frac{U}{2}\left(\frac{U}{2} - x\right)\left(\frac{U}{2} - y\right)\left(\frac{U}{2} - z\right)$$

Bemerkung: $\sqrt{f(x, y, z)}$ ist die Fläche des Dreiecks mit den Seitenlängen x, y, z (Heronsche Formel).
Hintergrund des Beispiels ist also die Maximierung der Fläche eines Dreiecks bei vorgegebenem Umfang.

$$\operatorname{grad} g(x, y, z) = (1, 1, 1)$$

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\frac{U}{2}\left(\frac{U}{2} - y\right)\left(\frac{U}{2} - z\right) \\ -\frac{U}{2}\left(\frac{U}{2} - x\right)\left(\frac{U}{2} - z\right) \\ -\frac{U}{2}\left(\frac{U}{2} - x\right)\left(\frac{U}{2} - y\right) \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \operatorname{grad}(f)(x, y, z)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{U}{2} - y\right)\left(\frac{U}{2} - z\right) = \left(\frac{U}{2} - x\right)\left(\frac{U}{2} - z\right) = \left(\frac{U}{2} - x\right)\left(\frac{U}{2} - y\right)$$

$$z \neq \frac{U}{2} \Rightarrow \frac{U}{2} - y = \frac{U}{2} - x \Rightarrow x = y \qquad (\text{analog für } x, y)$$

Es können aber nicht alle Seiten gleich $\frac{U}{2}$ sein. O.B.d.A. sei $z \neq \frac{U}{2}$, dann ist $x = y$. Angenommen $x = y = \frac{U}{2}$, dann müsste $z = 0$ sein. Also liegt einer der folgenden Fälle vor:

1. $x = y = z = \frac{U}{3}$
2. Eines der x, y, z ist gleich 0

Fall 2 ist allerdings für ein Dreieck nicht sinnvoll. Also ist die Fläche des Dreiecks: $\sqrt{f\left(\frac{U}{3}, \frac{U}{3}, \frac{U}{3}\right)} = \sqrt{\frac{U}{2}\left(\frac{U}{6}\right)^3} = \frac{U^2}{12\sqrt{3}}$

Kapitel 4

Differentialgleichungen

4.1 Einleitung

Eine *Differentialgleichung (Dgl.)* ist eine Gleichung, in der Ableitungen von ein oder mehreren Funktionen (in einer oder mehrerer Variablen) in Zusammenhang gebracht werden.
Wenn alle Funktionen nur von einer Variablen abhängen so spricht man von *gewöhnlichen Differentialgleichungen*

$$F\left(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)\right) = 0$$

ansonsten von *partiellen Differentialgleichungen*

$$F\left(x, y, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^{(n)} f}{\partial y^{(n)}}\right) = 0$$

Die Ordnung der höchsten in einer Differentialgleichung auftretenden Ableitung heißt die *Ordnung* der Differentialgleichung.
Besonders wichtig sind die sogenannten *linearen Differentialgleichungen*

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

(lineare gewöhnliche Differentialgleichung)

$$a_{20}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + a_{11}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{02}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + a_1\frac{\partial f}{\partial x_2} + a_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + a_0 f = b$$

(a_{ij}, a_k, b von x_1, x_2 abhängig) (lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung)

Notation oft $y^{(n)}$ für $y^{(n)}(x)$; oft schreibt man t für x (t steht hier für Zeit)

- $\dot{y}(t)$ bzw. $\dot{y}$ für $y'(t)$ (entspricht der Geschwindigkeit)
- $\ddot{y}(t)$ bzw. $\ddot{y}$ für $y''(t)$ (entspricht der Beschleunigung)

f_{xy} für $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, f_{xx} für $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$

Beispiele

1. $yy' = x$ ist eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung
2. $5y'' + x^2y' - \sin(x) \cdot y = 0$ ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung
3. $f_{xx}^2 + f_{yy} = xy$ ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung
4. $f_x - x^2y^3f_y = 0$ ist eine lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung

Interessante Differentialgleichungen kommen aus Anwendungen in der Physik, den Ingenieurswissenschaften, der Ökonomie, etc. sowie der Robotik.

1. $$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$$
   $$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx c \cdot y(t) \qquad (c > 0)$$
   Durch Grenzübergang ($\Delta t \to 0$) erhalten wir
   $$y'(t) = c \cdot y(t) \qquad \text{physikalischer: } \dot{y} = cy$$
   $$y(0) = y_0$$
   Lösung:
   $$y(t) = y_0 \cdot e^{ct}$$
   Probe:
   $$y(0) = y_0 \cdot e^{c \cdot 0} = y_0 \cdot 1 = y_0$$
   $$y'(t) = y_0 \cdot c \cdot e^{ct} = c \cdot y(t)$$
2. Geburtenrate: $G(t) \approx (a - b \cdot y(t)) \cdot y(t)$
   Todesrate: $T(t) \approx (c + dy(t)) \cdot y(t)$
   $$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx (G(t) - T(t)) \cdot y(t)$$
   Durch Grenzübergang ($\Delta t \to 0$) erhalten wir
   $$y' = \underbrace{(a - c)}_{\alpha} \cdot y(t) - \underbrace{(d + b)}_{\beta} y^2(t)$$
   $$y' = \alpha y + \beta y^2$$
   (nichtlineare Dgl. 1. Ordnung, Bernoullische Differentialgleichung)
   Lösung:
   $$y(t) = \frac{1}{c_1 e^{-\alpha t} + c_2}$$
   wobei $c_1 = \frac{1}{y_0} + \frac{\beta}{\alpha}$ und $c_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$

Beispiel Durchschnittsgeschwindigkeit eines Teilchens
$x(t)$ beschreibt den Ort des Teilchens zum Zeitpunkt t.

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=f(t,x(t))$$

$$x(t+\Delta t)=x(t)+f(t,x(t)\cdot\Delta t$$

"Differenzengleichung"(bei fixem Δt und diskreter Zeit)
Für $x(t_0)=x_0$ lassen sich alle $x(t_n)$ für $t_n=t_0+n\cdot\Delta t$ berechnen.
(Näherungsverfahren für $x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots$)

Physikalische Beispiele

Bewegung eines Trabanten mit der Masse m um einen Planeten mit der Masse M

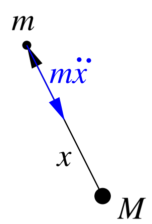


Abbildung 4.1: Gravitationsgesetz

x ist der Ortsvektor des Trabanten relativ zum Planeten als im Ursprung angenommen; $m\ddot{x}$ die Kraft, die der Planet auf den Trabanten ausübt.

$$m\ddot{x}=\frac{x}{\|x\|}\cdot\frac{mM\gamma}{\|x\|^2}\qquad(\gamma>0\quad\text{Gravitationskonstante})$$

Die Differentialgleichung hat also die Form $\ddot{x}=f(x)$.

Frage „Wie schnell muss sich der Trabant bewegen, um auf einer Kreisbahn zu bleiben?“

Ansatz

$$x(t)=r\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix}\qquad\omega\neq 0\quad\text{Winkelgeschwindigkeit}$$

$$\dot{x}=r\omega\begin{pmatrix}-\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{pmatrix}$$

$$\ddot{x}=r\omega^2\begin{pmatrix}-\cos\omega t\\ -\sin\omega t\end{pmatrix}=-\omega^2\cdot x=\frac{-M\gamma}{\|x\|^3}x$$

$$\omega^2 = \frac{M\gamma}{r^3}$$

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{M\gamma}{r^3}}$$

Bewegung im Schwerefeld der Erde

$$m\ddot{r} = -\gamma\frac{Mm}{r^2} \qquad (r(t) \in \mathbb{R})$$

$$\ddot{r} = \frac{-\gamma M}{\|r\|^2}$$

In Erdnähe ist $r = r_*$, dem Erdradius und $\frac{\gamma M}{r^2} = \frac{\gamma M}{r_*^2} \approx: g \approx 9,81\text{m}\cdot\text{sec}^{-2}$, also gilt:

$$\ddot{r} = -g$$

Die Funktion

$$r(t) = r_0 + v_0 t - \frac{g}{2}t^2$$

erfüllt die Differentialgleichung $\ddot{r} = -g$, da

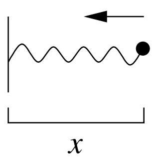
$$\dot{r}(t) = v_0 - gt \qquad \ddot{r}(t) = -g$$

wobei

$$\dot{r}(0) = v_0 \qquad r(0) = r_0$$

r_0 ist also die Startposition des Objekts, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit.

Bewegung einer Feder



$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

Dabei ist k die Rückstellkraft der Feder und r der Reibungskoeffizient.
Für $r = 0$:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} \cdot x$$

Die Funktion

$$x(t) = \sin(\omega t + c) \qquad \text{mit } \omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$$

erfüllt die Differentialgleichung, da

$$\dot{x}(t) = \omega \cos(\omega t + c)$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= -\omega \sin(\omega t + c)\\ &= -\frac{k}{m}\sin(\omega t + c)\\ &= -\frac{k}{m}x\end{aligned}$$

Um die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ zu erfüllen, setzt man $c = 0$.
Also ist

$$x(t) = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

eine Lösung der Differentialgleichung mit Anfangsbedingung $x(0) = 0$.

4.2 Spezielle gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Lösungsfamilie:

$$y(x) = g(x, c) \qquad (c \in I \subseteq \mathbb{R})$$

Oft kann man den Parameter c aus einer Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ eindeutig bestimmen.

4.2.1 Trennung der Variablen

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Wenn $g(a) = 0$ ist, dann ist $y(x) = a$ eine Lösung.
Für $g(y) \neq 0$:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x) \qquad \text{Trennung der Variablen}$$

Wenn für H und F gilt

$$H'(y) = \frac{1}{g(y)} \qquad F'(x) = f(x)$$

Dann folgt aus $H(y) = F(x) + c$, dass

$$\frac{y'}{g(y)} = H'(y) \cdot y' = F'(x) = f(x)$$

Aus $H(y) = F(x) + c$ kann man oft y explizit bestimmen.
Aus einer Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ ergibt sich $H(y_0) = F(x_0) + c$, also ist $c = H(y_0) - F(x_0)$.

Beispiel

$y' = p(x) \cdot y$ hat die konstante Lösung $y = 0$. Für $H(y) = ln|y|$ gilt $H'(y) = \frac{1}{y}$.
Sei $P' = p$, also $F(x) = P(x)$.
Trennung der Variablen ergibt die Gleichung

$$\ln|y| = P(x) + c$$

Fallunterscheidung:
1. Fall $y > 0$: $\ln y = P(x) + c$, also $y = e^c \cdot e^{P(x)}$
2. Fall $y < 0$: $-y = e^{\ln -y} = e^c \cdot e^{P(x)}$, also $y = -e^c \cdot e^{P(x)}$

$$y' = \pm e^c \cdot e^{P(x)} \cdot P'(x) = P'(x) \cdot y = p(x) \cdot y$$

Aus der Anfangsbedingung

$$y(x_0) = \pm e^c \cdot e^{P(x_0)} = y_0$$

lässt sich c wie folgt bestimmen, wobei das Vorzeichen als das von y_0 zu wählen ist:

$$c = \ln \frac{\pm y_0}{e^{P(x_0)}} = \ln \pm y_0 - P(x_0)$$

4.2.2 Substitution bei Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad x \neq 0$$

Ansatz:

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}$$

d.h. $y(x) = x \cdot z(x)$.
Dann gilt

$$y'(x) = z(x) + xz'(x)$$

und somit

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right) = f\big(z(x)\big)$$

Also erhalten wir für z die Differentialgleichung:

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}$$

Wenn z die Differentialgleichung $z' = \frac{f(z)-z}{x}$ erfüllt, dann gilt für $y = x \cdot z$, dass

$$\begin{aligned} y' &= z' \cdot x + z \cdot 1 \underset{\text{Dgl. für } z}{=} \\ &= \frac{f(z) - z}{x} \cdot x + z = f(z) - z + z = f(z) \\ &= f(\frac{y}{x}) \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung für z lösen wir mit Methode 1 (Trennung der Variablen):

$$\left(f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(z) = f(z) - z\right)$$

$$\int \frac{1}{f(z) - z}\, dz = H(z) = F(x) + c = \ln|x| + c$$

woraus man gegebenenfalls z bestimmen kann.

Beispiel

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \qquad y(1) = \frac{1}{3} \qquad 0 < x$$

$$z' = \frac{z^2 - z}{x}$$

$$H(z) = \int \frac{1}{z^2 - z}\, dz = \ln x + c$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{z^2 - z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2 - z}$$

ergibt $A = -1,\ B = 1$ und somit

$$H(z) = \ln(1 - z) - \ln z = \ln x + c$$

Für $x > 0$ erhalten wir

$$\frac{1 - z}{z} = x \cdot e^c$$

$$1 - z = e^c \cdot x \cdot z$$

$$z = \frac{1}{1 + e^c \cdot x}$$

Rücksubstitution:

$$y(x) = x \cdot z(x) = \frac{x}{1 + e^c \cdot x}$$

Bestimmung von c:

$$y(1) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{1 + e^c \cdot 1} \Leftrightarrow 3 = 1 + e^c \Leftrightarrow e^c = 2 \Leftrightarrow c = ln2$$

Also ist die Lösung der Differentialgleichung:

$$y(x) = \frac{x}{1 + 2x}$$

4.2.3 Variation der Konstanten bei linearen Differentialgleichungen

$$y' = p(x) \cdot y + r(x) \qquad \text{(homogen, wenn } r(x) = 0\text{)}$$

Im homogenen Fall ist die allgemeine Lösung $y_h = C \cdot e^{P(x)}$, wobei $P'(x) = p(x)$, da

$$y_h' = P'(x) \cdot C \cdot e^{P(x)} = p(x) \cdot y_h$$

Im inhomogenen Fall verwenden wir den Ansatz:

$$y = c(x) \cdot e^{P(x)}$$

("Konstante" c variiert mit x)

$$\begin{aligned} y'(x) &= c'(x) \cdot e^{P(x)} + \underbrace{c(x) \cdot e^{P(x)}}_{y(x)} \cdot \underbrace{P'(x)}_{p(x)} \\ &= c'(x) \cdot e^{P(x)} + p(x) \cdot y(x) \\ &= c'(x) \cdot e^{P(x)} + y'(x) - r(x) \end{aligned}$$

d.h.

$$c'(x) = \frac{r(x)}{e^{P(x)}}$$

Also

$$c(x) = \int r(x) \cdot e^{-P(x)}\, dx$$

Satz

Die allgemeine Lösung von $y' = p(x) \cdot y + r(x)$ ist

$$y = e^{P(x)} \cdot \left[C + \int r(x) \cdot e^{-P(x)}\, dx \right]$$

Für die Anfangsbedingung $y_0 = y(x_0)$ erhalten wir die spezielle Lösung

$$y = e^{P(x)} \cdot \left[y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} r(t) \cdot e^{-P(t)}\, dt \right]$$

$y_0(x) = e^{P(x)} \cdot \int r(x) \cdot e^{-P(x)}\, dx$ ist eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems und $y_h(x) = C \cdot e^{P(x)}$ die allgemeine Lösung des Problems von $y' = p(x) \cdot y$.
Also ist die allgemeine Lösung von $y' = p(x) \cdot y + r(x)$ gegeben durch $y = y_0 + y_h$.

Beweis Wenn u und v Lösungen von $y' = p(x) \cdot y + r(x)$ sind, dann gilt

$$(u - v)' = u' - v' = p(x) \cdot u + r(x) - (p(x) \cdot v + r(x)) = p(x)(u - v)$$

also ist $u - v$ Lösung des homogenen Problems.

Beispiel

$$y' = x \cdot y - 2x$$
$$p(x) = x \quad r(x) = -2x \quad P(x) = \frac{x^2}{2}$$

Wir sehen, dass die konstante Funktion $y_0(x) = 2$ eine spezielle Lösung ist. Also ist die allgemeine Lösung:

$$y(x) = 2 + c \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Für $y(0) = 3$ ist die Lösung $y(x) = 2 + e^{\frac{x^2}{2}}$.

4.2.4 Substitution bei Bernoullischer Differentialgleichung

$$y' = p(x) \cdot y + r(x) \cdot y^n \qquad (n + 0, 1)$$

Ansatz $z(x) = y(x)^{1-n}$

$$\begin{aligned} z'(x) &= (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y' \\ &= (1-n) \cdot y^{-n} \cdot (p(x) \cdot y + r(x) \cdot y^n) \\ &= (1-n) \cdot \underbrace{y^{1-n}}_{z(x)} \cdot p(x) + (1-n) \cdot r(x) \\ &= (1-n) \cdot (p(x) \cdot z(x) + r(x)) \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung lässt sich mit Methode 3 (Variation der Konstanten) lösen.

Beispiel

$$y' = -\frac{1}{x} y + x^2 y^2$$
$$p(x) = -\frac{1}{x} \quad r(x) = x^2 \quad n = 2$$

$$z' = \frac{1}{x} z - x^2$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung mit der allgemeinen Lösung (nach Methode 3, Variation der Konstanten)

$$z = \frac{x}{2}(c - x^2)$$

Die Rücksubstitution ergibt

$$y = \frac{2}{x(c - x^2)} = \frac{2}{cx - x^3}$$

4.2.5 Riccatische Differentialgleichung

$$y' = p(x) \cdot y + r(x) \cdot y^2 + q(x)$$

Satz

Sei u eine spezielle Lösung der Riccatischen Differentialgleichung und v die allgemeine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung

$$v' = \big(p(x) + 2u(x)r(x)\big) \cdot v + r(x) \cdot v^2 \qquad (\dagger)$$

dann ist $u + v$ die allgemeine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung.

Beweis

$$\begin{aligned}(u+v)' &= u' + v' \\ &= p(x) \cdot u + r(x) \cdot u^2 + q(x) + p(x) \cdot v + 2ur(x) \cdot v + r(x) \cdot v^2 \\ &= p(x)(u+v) + r(x) \cdot (u^2 + 2uv + v^2) + q(x) \\ &= p(x)(u+v) + r(x)(u+v)^2 + q(x)\end{aligned}$$

Wenn $\tilde{u}$ eine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung ist, dann ist $\tilde{u} - u$ eine Lösung von $(\dagger)$.

$$\begin{aligned}(\tilde{u} - u)' &= p(x)(\tilde{u} - u) + r(x)(\tilde{u}^2 - u^2) \\ &= p(x)(\tilde{u} - u) + r(x)\big((\tilde{u} - u)^2 + 2u(\tilde{u} - u)\big) \\ &= \big(p(x) + 2ur(x)\big)(\tilde{u} - u) + r(x) \cdot (\tilde{u} - u)^2\end{aligned}$$

also erfült $\tilde{u} - u$ die Differentialgleichung $(\dagger)$.

Beispiel

$$y' = y - y^2 + 2 \qquad y(0) = 5$$

$$p(x) = 1 \qquad q(x) = 2 \qquad r(x) = -1$$

$u(x) = 2$ ist eine spezielle Lösung für Riccatischen Differentialgleichung

$$(\dagger) \quad v' = (1 - u)v - v^2$$

$$(\dagger) \quad v' = -3v - v^2$$

hat die allgemeine Lösung (nach Substitution bei Bernoullischer Differentialgleichung)

$$v(x) = \frac{3}{ce^{3x} - 1} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

$$y(x) = u(x) + v(x) = 2 + \frac{3}{ce^{3x} - 1}$$

$$y(0) = 2 + \frac{3}{c-1} = 5 \Leftrightarrow c = 2$$

Somit ist die Lösung der Riccatischen Differentialgleichung bzgl. des Anfangswerts $y(0) = 5$

$$y(x) = 2 + \frac{3}{2e^{3x} - 1}$$

4.2.6 Lösung exakter Differentialgleichungen

Motivation

Angenommen die Funktion $y(x)$ erfüllt die Gleichung $u(x, y) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\underbrace{u_x(x, y)}_{\frac{\partial u}{\partial x}} \cdot 1 + u_y(x, y) \cdot y' = 0 \qquad (\dagger)$$

Definition

Sei R ein offenes Rechteck im $\mathbb{R}^2$. Eine Differentialgleichung der Form

$$f(x, y) + g(x, y) \cdot y' = 0 \qquad (\dagger)$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen f, g heißt *exakt*, wenn es eine Funktion $u : R \to \mathbb{R}$ gibt mit $f = u_x(x, y)$ und $g = u_y(x, y)$. Offenbar ist y eine Lösung von $(\dagger)$, wenn sie $u(x, y) = c$ erfüllt.

Satz

Seien $f, g : R \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f_y = g_x$. Dann ist die Lösung von $(\dagger)$ mit Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ implizit gegeben durch $u(x, y) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$, wobei

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} f(\xi, y)\, d\xi + \int_{y_0}^{y} g(x_0, \eta)\, d\eta$$

Beweis

$$u_x(x, y) = f(x, y)$$

$$u_y(x, y) = \int_{x_0}^{x} \underbrace{f_y(\xi, y)}_{= g_x(\xi, y)}\, d\xi + g(x_0, y) = g(x, y) - g(x_0, y) + g(x_0, y) = g(x, y)$$

Bemerkung Damit $u_x = f$ und $u_y = g$ muss gelten $f_y = u_{xy} = u_{yx} = g_x$ (da u 2-mal stetig differenzierbar ist).

Bemerkung Zur eindeutigen Auflösbarkeit von $u(x, y) = c$ muss man annehmen, dass $u_y = g(x, y) \neq 0$ (Satz über implizite Funktionen).

Beispiel

$$y' = \frac{x + y^2}{1 - 2xy} \Leftrightarrow \underbrace{(1 - 2xy)}_{g(x,y)} \cdot y' \underbrace{-(x + y^2)}_{f(x,y)} = 0$$

$$y(0) = 0 \qquad x_0 = 0 = y_0$$

Es handelt sich also um eine exakte Differentialgleichung, da

$$f_y(x, y) = -2y = g_x(x, y)$$

$$u(x, y) = -\int_0^x \xi + y^2 \, d\xi + \int_0^y 1 \, d\eta = -\frac{x^2}{2} - y^2 x + y$$

Also ist eine Lösung gegeben durch $y = y^2 x + \frac{x^2}{2}$.
Hierzu löst man mit Hilfe der "pq-Formel"nach y auf, wobei man das Vorzeichen in Abhängigkeit von der Anfangsbedingung zu wählen hat.

4.2.7 Lösung durch Übergang zur Umkehrfunktion („Vertauschung der Variablen“)

$$y' = f(x, y)$$

Zur Erinnerung: $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(a)}$
x als „Umkehrfunktion von y“:

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{f(x, y)}$$

Oft kann man die Differentialgleichung für $x(y)$ mit einer der vorigen Methoden lösen.

Beispiel

$$y' = \frac{xy}{x^2 + 3y^3} \qquad y(3) = 1$$

Durch Vertauschen der Variablen gehen wir über zu

$$x' = \frac{x^2 + 3y^3}{xy} \qquad x(1) = 3$$

$$x' = \frac{x}{y} + \frac{3y^2}{x}$$

(Bernoullische Differentialgleichung mit $n = -1$)
Diese lösen wir mit dem Ansatz $z = x^2$. Für z ergibt sich dann die Differentialgleichung

$$z' = \frac{2}{y} z + 6y^2$$

Diese Differentialgleichung löst man mittels Variation der Konstanten.

$$z(y) = c \cdot y^2 + 6y^3 \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Aus der Anfangsbedingung ergibt sich

$$z(1) = x(1)^2 = 9$$

und somit

$$c + 6 = 9 \Rightarrow c = 3$$

also $c = 3$.
Somit ist die eindeutige Lösung für z gegeben durch

$$z(y) = 3y^2 + 6y^3$$

und die für x durch

$$x(y) = \sqrt{3y^2 + 6y^3}$$

(Vorzeichen positiv, da $x(1) = 3$)

4.3 Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Wir betrachten ein Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

wobei $f : R \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist und R ein Rechteck, d.h.

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x - x_0| \le a, \quad |y - y_0| \le b\right\}$$

Sei

$$M = \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)|$$

und

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

4.3.1 Satz (Peano)

Wenn f stetig auf R ist, so besitzt das Anfangswertproblem (1) mindestens eine Lösung auf $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

4.3.2 Definition

f heißt *Lipschitz-stetig in y auf R* mit Lipschitz-Konstante L (≥ 0), wenn

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2) \leq L|y_1 - y_2| \qquad \text{für alle } (x, y_1), (x, y_2) \in R$$

Bemerkung

1. Eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass $\frac{\partial f}{\partial y}$ auf R stetig ist.
   (man setzt dann $L = \max\limits_{(x,y)\in R} |D_2 f(x, y)|$)
2. $f(x, y) = |y|$ ist Lipschitz-stetig auf R in y ($L = 1$), aber f ist in $(x, 0)$ nicht differenzierbar.

4.3.3 Satz (Picard-Lindelöf)

Wenn f Lipschitz-stetig in y auf R ist, dann hat das Anfangswertproblem (1) genau eine Lösung auf dem Intervall $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, die iterativ mit folgendem Verfahren angenähert werden kann:
Man wähle eine stetige Funktion $u_0 : I \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{graph}(u_0) \subseteq R$, d.h. für alle $x \in I$ gilt $u_0(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$. (z.B. $u_0(x) = y_0$)
Die rekursiv definierte Folge (u_n) mit

$$u_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_n(t))\, dt$$

konvergiert dann auf I gleichmäßig gegen die eindeutige Lösung der Differentialgleichung.

Motivation

Unter der Annahme $y(x_0) = y_0$ ist

$$y' = f(x, y)$$

äquivalent zu

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx =: T(y)(x)$$

Die Folge (u_n) ist dann gegeben durch

$$u_n = T^n(u_0)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} |T(u) - T(v)|(x) &\leq \int_{x_0}^{x} \underbrace{|f(x, u(x)) - f(x, v(x))|}_{\leq L|u(x) - v(x)|}\, dx \\ &\leq |x - x_0| L \|u - v\| \end{aligned}$$

$|x - x_0| \leq \alpha$ stellt sicher, dass $|x - x_0| \cdot L$ (für geeignet gewählte Lipschitzkonstante L) genügend klein bleibt, um die Konvergenz sicherzustellen.

Exkurs: Banach'scher Fixpunktsatz

$$(X, \underbrace{d}_{\text{Metrik}})$$

$f : X \to X$ mit $\forall\, x, y\ |f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ mit $0 < L < 1$.
Sei $x_0 \in X$ beliebig. Für $x_n = f^n(x_0)$ gilt dann

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) \le Ld(x_{n+1}, x_n) \le \ldots \le \underbrace{L^n d(\overset{=f(x_0)}{x_1}, x_0)}_{\text{geom. Reihe}}$$

Beweis (mittels vollständiger Induktion)
Induktionsanfang für $n = -1$:

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(x_1, x_0) \le \frac{1}{L} \cdot d(x_1, x_0) = L^n \cdot (x_1, x_0) \quad \text{(da } 0 < L < 1\text{)}$$

Induktionsschritt $n \to n + 1$:

$$\begin{aligned} d(x_{n+3}, x_{n+2}) &= d\big(f(x_{n+2}), f(x_{n+1})\big) \\ &\le L \cdot d(x_{n+2}, x_{n+1}) && \text{(da } f \text{ Lipschitz-stetig)} \\ &\le L \cdot (L^n \cdot d(x_1, x_0)) && \text{(mit I.H.)} \\ &= L^{n+1} \cdot d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Da $L < 1$ und somit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} L^k$ konvergiert, folgt, dass (x_n) eine Cauchyfolge ist.
Wenn (X, d) Cauchy-vollständig ist (d.h. jede Cauchy-Folge konvergiert), dann ist $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ein Fixpunkt von f, da

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{x_{n+1}} = x \quad \text{(weil } f \text{ stetig ist)}$$

Bemerkung des Satzes von Picard-Lindelöf

1. Die Aussage gilt auch für $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \le a\}$ wenn f auf S in y Lipschitz-stetig ist.
2. Für u_n gilt $y_0 - b \le u_n(x) \le y_0 + b$ für alle $x \in I$.

Beispiel

1.

$$y' = \underbrace{x^2 + y^2}_{f(x,y)} \qquad y(0) = 0$$

f ist stetig differenzierbar, also ist f Lipschitz-stetig in y.

$$
\begin{aligned}
u_0(x) &= 0 \\
u_1(x) &= \int_0^x f(x, u_0(x))\, dx = \int_0^x x^2\, dx = \frac{x^3}{3} \\
u_2(x) &= \int_0^x f(x, u_1(x))\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \\
u_3(x) &= \frac{x^3}{63} + \frac{x^7}{63} + \frac{x^{15}}{59535} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Also ist die eindeutige Lösung durch eine Potenzreihe gegeben.

2.

$$
y' = y^2 \qquad y(0) = 1
$$

$$
f(x, y) = \frac{\partial y^2}{\partial y} = 2y
$$

Auf Rechtecken ist f Lipschitz-stetig, auf $S = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}$ ist f aber nicht Lipschitz-stetig, da

$$
|f(y_1) - f(y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2| \cdot |y_1 - y_2|
$$

und $|y_1 + y_2|$ beliebig groß werden kann, auch wenn $|y_1 - y_2| < \varepsilon$.

Mit der Bernoulli-Methode erhält man die eindeutige Lösung $y(x) = \frac{1}{1-x}$.

(Hierzu wählt man für die Substitution $z = \frac{1}{y}$ und erhält als Differentialgleichung $z' = -1$ mit der allgemeinen Lösung $z(x) = -x + c$. Die Rücksubstitution ergibt $y(x) = \frac{1}{-x+c}$. Mit $y(0) = 1$ erhält man die eindeutige Lösung $y(x) = \frac{1}{1-x}$.)

Also lässt sich der Satz von Picard-Lindelöf nicht umkehren.

4.4 Spezielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

Wir betrachten Anfangsprobleme der Gestalt

$$
y'' = f(x, y, y') \qquad y(x_0) = \alpha_0 \quad y(x_0) = \alpha_1
$$

Da die Differentialgleichung 2. Ordnung ist, müssen wir zum Zeitpunkt x_0 sowohl den Ort α_0 als auch die Geschwindigkeit α_1 vorgeben, um die Eindeutigkeit der Lösung zu garantieren.

4.4.1 Funktion y tritt nicht auf

$$y'' = f(x, y')$$

Löse $z' = f(x, z)$ mit Anfangswert $z(x_1) = \alpha_1$. Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung, die man gegebenenfalls mit den Methoden aus 4.2 lösen kann. Dann ist

$$y(x) = \alpha_0 + \int\limits_{x_0}^{x} z(x)\ dx$$

die Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems.

4.4.2 Unabhängige Variable tritt nicht auf

$$y'' = f(y, y')$$

Wir leiten eine Differentialgleichung für die Umkehrfunktion $x(y)$ („Tausch der Variablen") her. Dazu muss $y' \neq 0$, insbesondere $\alpha_1 (= y'(x_0)) \neq 0$; es gilt

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$$

Somit ergibt sich für x'' aufgrund der Kettenregel

$$\begin{aligned} x''(y) &= \frac{d}{dy}(x'(y)) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y'(x(y))}\right) \\ &= -\frac{1}{y'(x(y))^2} \cdot \frac{d}{dy}\Big(y'(x(y))\Big) = -(x'(y))^2 \cdot \frac{d}{dy}\Big(y'(x(y))\Big) \\ &= -(x')^2 \cdot y''(x(y)) \cdot x' = -(x')^3 \cdot y'' = -(x')^3 \cdot f(y, y') \\ &= -(x')^3 \cdot f\left(y, \frac{1}{x'}\right) \end{aligned}$$

und somit die Differentialgleichung

$$x''(y) = -(x'(y))^3 \cdot f(y, \frac{1}{x'})$$

Dies ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung für x'. Die Anfangsbedingungen sind

$$x(\alpha_0) = x_0 \qquad x'(\alpha_0) = \frac{1}{\alpha_0}$$

Wenn man in $x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$ für x den Wert x_0 einsetzt, erhält man:

$$x'(\alpha_0) = x'(y(x_0)) = \frac{1}{y'(x_0)} = \frac{1}{\alpha_1}$$

Löse nun die Differentialgleichung für x' mit Anfangsbedingung $x'(\alpha_0) = \frac{1}{\alpha_1}$ mit der Methode aus 4.4.1.

Wenn u die Lösung ist, dann setze

$$x(y) = \alpha_0 + \int\limits_{x_0}^{x} u(t)\ dt$$

Beispiel

$$y'' = -\frac{(y')^2}{y} \qquad y(0) = 3 \quad y'(0) = 1$$

Es gilt

$$x'' = -(x')^3 \cdot f\left(y, \frac{1}{x'}\right) = -(x')^3 \cdot \frac{-1}{y \cdot (x')^2} = \frac{x'}{y}$$

und wir erhalten das Anfangswertproblem

$$x'' = \frac{x'}{y} \qquad x(3) = 0 \quad x'(3) = 1$$

Das Anfangswertproblem

$$v'(y) = \frac{v}{y} \qquad v(3) = 1$$

hat die eindeutige Lösung (mit Trennung der Variablen)

$$v(y) = \frac{y}{3}$$

Also ist

$$x(y) = 0 + \int_3^y \frac{t}{3}\, dt = \frac{y^2}{6} - \frac{9}{6} = \frac{y^2 - 9}{6}$$

und damit

$$y = \sqrt{6x + 9}$$

(Vorzeichen ergibt sich aus $y(0) = 3$)

4.4.3 x und y' treten nicht auf

Wir betrachten Differentialgleichungen der Form

$$y'' = f(y)$$

Physikalisch bedeutet dies, dass die Kraft nur vom Ort abhängt.

Vorgehensweise

Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit $2y'$:

$$2y'y'' = 2f(y)y'$$

Wenn $F' = f$, dann gilt nach Integration

$$(y')^2 = 2F(y) + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Aus der Anfangsbedingung folgt, dass $c = \alpha_1^2 - 2F(\alpha_0)$. Wenn man die Stammfunktion F so gewählt hat, dass $F(\alpha_0) = 0$, dann gilt $c = \alpha_1^2$.

Also ist

$$y' = \pm\sqrt{2F(y) + \alpha_1^2} \qquad \text{mit } y(x_0) = \alpha_0$$

wobei

$$F(y) = \int\limits_{\alpha_0}^{y} f(t)\, dt$$

Für die Wurzel wählt man das Vorzeichen von α_1.
Dieses Anfangswertproblem erster Ordnung kann man gegebenenfalls mit den Methoden aus Abschnitt 4.2 lösen.

Beispiel: Rakete im Schwerefeld der Erde

Sei m die Masse einer Rakete und M die Masse der Erde.

Fragestellung: „Wie verhält sich eine Rakete im Schwerefeld der Erde, wenn diese mit einer bestimmten Startgeschwindigkeit v_0 von der Erde aus in den Weltraum geschossen wird?“
Die zugrundeliegende Differentialgleichung ergibt sich aus dem Gravitationsgesetz:

$$m\ddot{s} = \frac{-\gamma m M}{s^2}$$

Hier kann m gekürzt werden; das Problem ist also unabhängig von der Masse der Rakete. Wir erhalten folgendes Anfangswertproblem:

$$\ddot{s} = \frac{-\gamma M}{s^2} \qquad s(0) = s_0 \ (> 0) \quad \dot{s} = v_0 \ (\geq 0)$$

Frage: „Wie muss man v_0 wählen, dass s beliebig groß wird, d.h. die Rakete das Schwerefeld der Erde verlässt?“
Nach Methode 3 erhält man:

$$\dot{s} = \sqrt{2F(s) + v_0^2}$$

wobei

$$F(s) = \int\limits_{s_0}^{s} \frac{-\gamma M}{t^2}\, dt = \frac{\gamma M}{t}\Big|_{t=s_0}^{t=s} = \gamma M \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_0}\right)$$

Wir erhalten nun das Anfangswertproblem:

$$\dot{s} = \sqrt{\underbrace{2\gamma M}_{a}\frac{1}{s} \underbrace{-2\gamma M\frac{1}{s_0} + v_0^2}_{b}} = \sqrt{\frac{a}{s} + b} \qquad s(0) = s_0$$

Für $b \geq 0$ gilt $\dot{s} \geq 0$. Die Geschwindigkeit ist also immer nicht-negativ, d.h. die Rakete fällt nicht zurück.

Es gilt $b \geq 0$ genau dann, wenn $v_0 \geq \sqrt{\frac{2\gamma M}{s_0}}$. Wir werden sehen, dass $\sqrt{\frac{2\gamma M}{s_0}}$ die minimale Geschwindigkeit ist, die die Rakete zum Startzeitpunkt haben muss, um das Schwerefeld der Erde zu verlassen.
Für die realen Bedinungen auf der Erde ($\gamma = 6,7 \cdot 10^{-23},\ M = 6 \cdot 10^{27},\ s_0 =$ Erdradius $\approx 6,3 \cdot 10^3$) ist $v_0 \approx 11,297$km/sec.
Wir betrachten nun den Grenzfall $b = 0$, d.h. die minimale Startgeschwindigkeit v_0, bei der die Geschwindigkeit gerade noch ≥ 0 bleibt. Dabei interessiert uns, ob die Rakete bei dieser Geschwindigkeit auch das Schwerefeld der Erde verlässt.
Mit Trennung der Variablen erhalten wir

$$t + c = \int_{s_0}^{s} \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{\eta}}}\, d\eta = \int_{s_0}^{s} \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\eta}\, d\eta = \frac{2}{3\sqrt{a}} \cdot \eta^{\frac{3}{2}} \Big|_{\eta=s_0}^{\eta=s} = \frac{2}{3\sqrt{a}} \cdot \left(s^{\frac{3}{2}} - s_0^{\frac{3}{2}} \right)$$

Für $t = 0$ ist $s = s_0$ und somit $c = 0$. Durch Auflösen nach s erhalten wir

$$s(t) = \left(\frac{3\sqrt{a}}{2} t + s_0^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Weil $\frac{3\sqrt{a}}{2} > 0$ wird s beliebig groß, also verlässt die Rakete das Schwerefeld der Erde bei Startgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{2\gamma M}{s_0}}$. Wir zeigen nun, dass dies die minimale solche Geschwindigkeit ist. Angenommen $b < 0$, dann auch

$$\frac{a}{s} + b \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{s} \geq \frac{-b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad s \leq \frac{-a}{b}\ (\geq 0)$$

Die Rakete kann sich also nicht weiter als $\frac{-a}{b}$ von der Erde entfernen.
Da $\frac{b^2}{a^2} \leq \frac{1}{s^2}$ gilt aufgrund der Differentialgleichung

$$\ddot{s} = \frac{-\gamma M}{s^2} \leq \frac{-\gamma M b^2}{a^2} =: c < 0$$

Also gilt für die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}
\dot{s}(t) &= v_0 + \int_0^t \ddot{s}(t)\, dt \\
&\leq v_0 + \int_0^t \frac{-\gamma M b^2}{a^2}\, du \\
&= v_0 + t \cdot \left(\frac{-\gamma M b^2}{a^2} \right) \\
&= v_0 + t \cdot c
\end{aligned}$$

Da $c < 0$ kann $\dot{s}(t)$ für genügend großes t beliebig negativ werden; somit fällt die Rakete also auf die Erde zurück. Spätestens für

$$t \geq \tilde{t}_0 = \frac{a^2}{\gamma M b^2} \cdot v_0$$

wird $\dot{s}(t)$ negativ, d.h. spätestens zum Zeitpunkt $\tilde{t}_0$ wird der „Point of Return" erreicht. Für t mit $s(t) < \frac{-a}{b}$ gilt $\dot{s}(t) > 0$ und somit kann die Geschwindigkeit nicht 0 werden, bevor der Punkt $\frac{-a}{b}$ erreicht ist. Also ist die Funktion

$$s : [0, t_0] \to [s_0, -\frac{a}{b}]$$

streng monoton wachsend.
Für die Umkehrfunktion gilt $t'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{s}+b}}$. Also ist

$$t_0 = \int\limits_{s_0}^{\frac{-a}{b}} \frac{ds}{\sqrt{\frac{a}{s}+b}}$$

der präzise Zeitpunkt der Umkehr.

4.4.4 Die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

Wir betrachten Differentialgleichungen der Form

$$y'' = p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y$$

Die Funktion $y(x) = 0$ ist hier immer eine Lösung. Sei y_1 eine nichttriviale von 0 verschiedene Lösung. Weitere Lösungen findet man durch „Variation der Konstanten". Hierbei verwenden wir den Ansatz

$$y = v \cdot y_1$$

Es gilt

$$y'(x) = v'(x) \cdot y_1(x) + v(x) \cdot y_1'(x)$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= v''(x) \cdot y_1(x) + v'(x) \cdot y_1'(x) + v'(x) \cdot y_1'(x) + v(x) \cdot y_1''(x) \\ &= v''(x) \cdot y_1(x) + 2v'(x) \cdot y_1'(x) + v(x) \cdot y_1''(x) \end{aligned}$$

Wir erhalten durch Einsetzen in die Differentialgleichung

$$y''(x) = \underbrace{p(x)v'(x)y_1(x) + p(x)v(x)y_1'(x)}_{p(x)\cdot y'} + q(x)\underbrace{v(x)y_1(x)}_{y}$$

Wenn y die Differentialgleichung erfüllt, dann gilt

$$v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' = pv'y_1 + \underbrace{\underbrace{pvy_1' + qvy_1}_{v(py_1' + qy_1)}}_{y_1''} = pv'y_1 + vy_1''$$

und somit

$$v''y_1 + 2v'y_1' = pv'y_1$$

also

$$
\begin{aligned}
v''(x) &= \frac{p(x)v'(x)y_1(x) - 2v'(x)y_1'(x)}{y_1(x)} \\
&= v'(x)\left(p(x) - 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right)
\end{aligned}
$$

Man berechne nun die Lösung für v' mit „Trennung der Variablen“ und integriere diese. Entstehende Parameter werden durch die Anfangsbedingungen fixiert.

Beispiel

$$
y'' = \underbrace{\frac{2}{x}}_{p(x)} \cdot y' \underbrace{-\frac{2}{x^2}}_{q(x)} \cdot y \qquad y(1) = 1 \quad y'(1) = 0
$$

Offenbar ist $y_1(x) = x$ eine Lösung der Differentialgleichung.
Ansatz:

$$
y(x) = v(x) \cdot y_1(x)
$$

$$
v'' = v'(x)\left(\frac{2}{x} - 2\frac{1}{x}\right) = 0
$$

Also ist $v(x) = c_1x + c_2$ und $y(x) = c_1x^2 + c_2x$. Aus

$$
y(1) = 1 = c_1 + c_2 \qquad y'(1) = 0 = 2c_1 + c_2
$$

folgt $c_1 = -1$ und $c_2 = 2$. Also ist

$$
y(x) = -x^2 + 2x
$$

die Lösung der Differentialgleichung.

4.5 Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Wir betrachten Differentialgleichungen der Form

$$
\underbrace{a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y^{(1)}(x) + a_0(x)y(x)}_{L(y)(x)} = b(x) \quad (1)
$$

wobei $x \in I$ (I ist ein Intervall in $\mathbb{R}$), alle $a_i(x)$ stetig und $a_n(x) \neq 0$ für $x \in I$. L ist linear, d.h. $L(c \cdot y) = c \cdot L(y)$ und $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$. Also schreibt man in kompakter Form $L(y) = b$. Die Differentialgleichung $L(y) = 0$ nennen wir das (zugehörige) *homogene Problem*.
Als Anfangsbedingungen müssen gegeben sein:

$$
y^{(0)}(x_0) = \alpha_0\ ,\ \ldots\ ,\ y^{n-1}(x_0) = \alpha_{n-1} \quad (2)
$$

Die Menge der homogenen Lösungen $\{y|L(y)=0\}$ bildet einen Vektorraum, da

$$L(y) = 0 \Rightarrow L(c \cdot y) = c \cdot L(y) = 0$$
$$L(y_1) = 0 = L(y_2) \Rightarrow L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = 0$$

Gesucht: n linear unabhängige Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ von $L(y) = 0$; diese heißen *Fundamentalsystem* bzw. Integralbasis.
Wenn y_* eine spezielle Lösung von (1) ist und $y_h = c_1 \cdot y_1 + \ldots + c_n \cdot y_n$ die allgemeine Lösung des homogenen Problems $L(y) = 0$ ist, dann ist $y_* + y_h$ die allgemeine Lösung von (1).

Zur Erinnerung: $y_1, \ldots, y_n$ linear unabhängig bedeutet

$$c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n = 0 \Rightarrow c_1 = \ldots = c_n = 0$$

Definition: Wronski-Matrix

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

4.5.1 Satz

Seien $y_1, \ldots, y_n$ (n-1)-mal stetig differenzierbar. Wenn $y_1, \ldots, y_n$ linear abhängig sind, dann $\det W(x) = 0$ für alle $x \in I$.

Beispiel

Sei $I = \mathbb{R}$ und $y_1(x) = x,\ y_2(x) = x^2 - 2,\ y_3(x) = 2x^2 + 3x - 4$. Wir wollen prüfen, ob diese Funktionen linear abhängig sind.

$$W(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 - 2 & 2x^2 + 3x - 4 \\ 1 & 2x & 4x + 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det W(x) &= x \cdot (8x - 8x - 6) - \big(4(x^2 - 2) - 2(2x^2 + 3x - 4)\big) \\ &= -6x - 4x^2 + 8 + 4x^2 + 6x - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dies erlaubt es noch nicht, obigen Satz anzuwenden. Trotzdem sind y_1, y_2, y_3 linear abhängig, da

$$y_3 = 2y_2 + 3y_1$$

Beispiel

Sei $I = \mathbb{R}$ und $y_1(x) = x,\ y_2(x) = \sin x,\ y_3(x) = \cos x$.

$$W(x) = \begin{pmatrix} x & \sin x & \cos x \\ 1 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det W(x) &= x \cdot \det \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ -\sin x & -\cos x \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\sin x & -\cos x \end{pmatrix} \\ &= x \cdot (-\cos^2 x - \sin^2 x) - (-\cos x \cdot \sin x + \cos x \cdot \sin x) \\ &= -x \end{aligned}$$

Also ist z.B. $\det W(1) \neq 0$ und damit sind nach obigem Satz y_1, y_2, y_3 linear unabhängig.

4.5.2 Satz

Das Anfangswertproblem (1) mit Anfangsbedingungen (2) hat auf I eine eindeutige Lösung.

4.5.3 Satz

Wenn $y_1, \ldots, y_n$ linear unabhängige Lösungen von $L(y) = 0$ sind, dann ist $c_1 \cdot y_1 + \ldots + c_n \cdot y_n (c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R})$ die allgemeine Lösung des homogenen Problems $L(y) = 0$.

4.5.4 Satz

Wenn $y_1, \ldots y_n$ Lösungen von $L(y) = 0$ sind, dann gilt entweder

i) $\det W(x) = 0$ für alle $x \in I$ oder

ii) $\det W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.

Im Falle ii) bilden $y_1, \ldots y_n$ dann ein Fundamentalsystem.

Beispiel

$$x \cdot (x-1) \cdot y'' - (2x-1) \cdot y' + 2y = 0$$

Diese Differentialgleichung hat folgende zwei Lösungen: $y_1(x) = x^2$ und $y_2 = (x-1)^2$. Man beachte, dass der höchste Koeffizient $x \cdot (x-1)$ nicht immer ungleich 0 ist. y_1, y_2 sind linear unabhängig, da

$$cy_1 + dy_2 = cx^2 + dx^2 - 2dx + d = 0 \underset{\text{Koeff.vergl.}}{\Longrightarrow} d = 0,\ c = 0$$

Wir berechnen die Wronski-Matrix und deren Determinante:

$$W(x) = \begin{pmatrix} x^2 & (x-1)^2 \\ 2x & 2(x-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det W(x) &= 2x^2(x-1) - 2x(x-1)^2 = (x-1)(2x^2 - 2x^2 + 2x) \\ &= 2x(x-1)\end{aligned}$$

Also nimmt $\det W(x)$ sowohl 0 also auch von 0 verschiedene Werte an, was aber nicht im Widerspruch zum Satz steht, da der höchste Koeffizient $x \cdot (x-1)$ nicht immer von 0 verschieden ist.

4.5.5 Variation der Konstanten

Sei $c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$ die allgemeine Lösung des homogenen Problems.

Ansatz

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j(x) \cdot y_j(x)$$

Da die Wronski-Matrix invertierbar ist, hat

$$W(x) \cdot \begin{pmatrix} v_1'(x) \\ \vdots \\ v_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung. Integrieren der so gefundenen v_i' ergibt die Lösung

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j(x) \cdot y_j(x)$$

des Problems $L(y) = b$.

Beweis

$$W(x) \cdot \begin{pmatrix} v_1'(x) \\ \vdots \\ v_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}$$

heißt explizit

$$0 = \sum_{j=1}^{n} y_j^{(i-1)} \cdot v_j' \qquad (1 \leq i < n)$$

und

$$\frac{b}{a_n} = \sum_{j=1}^{n} y_j^{(n-1)} \cdot v_j'$$

Wir behaupten, dass

a) für $0 \leq i < n$ gilt

$$y^{(i)}(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j^{(i)}(x) \cdot v_j(x)$$

b)

$$y^{(n)}(x) = \frac{b(x)}{a_n(x)} + \sum_{j=1}^{n} y_j^{(n)}(x) \cdot v_j(x)$$

Beweis für a) mit Induktion über i von 0 bis $n-1$:
Induktionsanfang ($i = 0$):

$$y^{(0)}(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j(x) \cdot y_j^{(0)}(x) \qquad \text{nach Definition von y}$$

Induktionsschritt ($i \to i+1$):

$$\begin{aligned} y^{(i+1)}(x) &= \frac{d}{dx} y^{(i)}(x) \overset{\text{IH}}{=} \frac{d}{dx} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^{(i)}(x) \cdot v_j(x) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n} y_j^{(i+1)}(x) \cdot v_j(x) + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} y_j^{(i)}(x) \cdot v_j'(x)}_{=0} \\ &= \sum_{j=0}^{n} y_j^{(i+1)}(x) \cdot v_j(x) \end{aligned}$$

Beweis für b)

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= \frac{d}{dx} y^{(n-1)}(x) \underset{\text{a)}}{=} \frac{d}{dx} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^{(n-1)}(x) \cdot v_j(x) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} y_j^{(n)}(x) \cdot v_j(x) + \sum_{j=1}^{n} y_j^{(n-1)}(x) \cdot v_j'(x) \\ &= \sum_{j=1}^{n} y_j^{(n)}(x) \cdot v_j(x) + \frac{b(x)}{a_n(x)} \end{aligned}$$

Wir können nun zeigen, dass $y = \sum\limits_{j=1}^{n} v_j \cdot y_j$ eine Lösung von $L(y) = b$ ist:

$$\begin{aligned}
b(x) &\underset{\text{b)}}{=} a_n(x) \cdot y^{(n)}(x) - \sum_{j=1}^{n} a_n(x) \cdot y_j^{(n)}(x) \cdot v_j \\
&\underset{*}{=} a_n(x) \cdot y^{(n)}(x) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x) \cdot y_j^{(k)}(x) \cdot v_j(x) \\
&= a_n(x) \cdot y^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x) \sum_{j=1}^{n} y_j^{(k)}(x) \cdot v_j(x) \\
&\underset{\text{a)}}{=} a_n(x) \cdot y^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x) \cdot y^{(k)}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \cdot y^{(k)}(x)
\end{aligned}$$

($*$ y_j ist Lösung des homogenen Problems)

Beispiel

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x} \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \qquad I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Wir lösen zuerst das homogene Problem $y'' = -y$ und erhalten die Lösungen $y_1(x) = \cos x$ und $y_2(x) = \sin x$. Diese bilden ein Fundamentalsystem, da

$$W(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

mit

$$\det W(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0 \text{ für alle } x \in I$$

Eine Lösung des inhomogenen Problems erhält man durch „Variation der Konstanten“:

$$y(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$$

wobei

$$W(x) \cdot \begin{pmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos x} \end{pmatrix}$$

d.h.

$$\cos x \cdot v_1'(x) + \sin x \cdot v_2'(x) = 0 \tag{4.1}$$

$$-\sin x \cdot v_1'(x) + \cos x \cdot v_2'(x) = \frac{1}{\cos x} \tag{4.2}$$

Aus (4.1) erhalten wir

$$\begin{aligned}
-\sin x \cdot v_2'(x) &= \cos x \cdot v_1'(x) \qquad \text{und somit} \\
v_1'(x) &= -\tan(x) \cdot v_2'(x)
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (4.2) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x}{\cos x} v_2'(x) + \cos x \cdot v_2'(x) &= \frac{1}{\cos x} \qquad \text{und somit} \\ (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1}) \cdot v_2'(x) &= 1 \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} v_1'(x) &= -\tan x \\ v_2'(x) &= 1 \end{aligned}$$

Durch Integrieren erhalten wir

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \ln(\cos x) + c_1 \\ v_2(x) &= x + c_2 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = (\ln(\cos x) + c_1) \cdot \cos x + (x + c_2) \cdot \sin x \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Wir bestimmen die spezielle Lösung für das Anfangswertproblem:

$$y(0) = 0 = c_1 \cdot \cos 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y'(0) = 1 = c_2 \cdot \cos 0 \Rightarrow c_2 = 1$$

Somit erhalten wir als Lösung für das Anfangswertproblem:

$$y(x) = \ln(\cos x) \cdot \cos x + x \cdot \sin x + \sin x$$

4.6 Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten Differentialgleichungen der Form

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = b(x) \qquad (a_i \in \mathbb{R})$$

Hier bestimmen wir zuerst Lösungen des homogenen Problems $L(y) = 0$.

Idee

$$y(x) = e^{\lambda x} \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

Es gilt:

$$y^{(k)}(x) = \lambda^k y(x)$$

Einsetzen in $L(y) = 0$ ergibt

$$\underbrace{(\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \lambda + a_0)}_{P(\lambda)} \cdot e^{\lambda x} = 0$$

Dies ist äquivalent zu $P(\lambda) = 0$, wobei $P(\lambda)$ *charakteristisches Polynom* der Differentialgleichung heißt.

4.6.1 Satz

Ist λ eine k-fache reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ der Differentialgleichung, dann sind $y_1(x) = e^{\lambda x}, \dots, y_k(x) = x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$ linear unabhängige Lösungen des homogenen Problems.

4.6.2 Satz

Ist $\lambda = \alpha + i\beta$ eine k-fache komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$, dann sind

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \dots, y_k(x) = x^{k-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x,$$

$$y_{k+1}(x) = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x, \dots, y_{2k}(x) = x^{k-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$$

$2k$ linear unabhängige Lösungen.

Erläuterungen

Ist $\lambda = \alpha + i\beta$, dann ist $e^{\lambda x} = e^{\alpha x} \cdot (\cos \beta x + i \sin \beta x)$.
Man kann zeigen, dass $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ und $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$ Lösungen (des homogenen Problems) sind, falls $P(\lambda) = 0$.
Da die Koeffizienten a_j alle reell sind, folgt aus $P(\lambda) = 0$, dass $P(\overline{\lambda}) = 0$.
Es gilt: $\mathfrak{Re}(e^{\lambda x}) = \mathfrak{Re}(e^{\overline{\lambda} x})$ und $\mathfrak{Im}(e^{\overline{\lambda} x}) = -\mathfrak{Im}(e^{\lambda x})$.

4.6.3 Satz

Eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten hat n linear unabhängige Lösungen, die durch Satz 4.6.1 und Satz 4.6.2 vollständig beschrieben werden (wobei von konjugiert komplexen Nullstellen nur eine einen Beitrag liefert).

Beispiele

1. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + a_1 y' + a_0 \cdot y = 0$$

Das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

hat die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}\right)$$

Fall 1 Falls $a_1^2 > 4a_0$, dann erhalten wir zwei verschiedene reelle Lösungen und für die Differentialgleichung die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$$

Fall 2 Falls $a_1^2 = 4a_0$, dann erhalten wir eine reelle Lösung mit Vielfachheit 2 und für die Differentialgleichung die allgemeine Lösung

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) \cdot e^{-\frac{a_1}{2}x}$$

Als Fundamentalsystem erhalten wir hier

$$y_1(x) = e^{-\frac{a_1}{2}x} \qquad y_2(x) = x \cdot e^{-\frac{a_1}{2}x}$$

Fall 3 $a_1^2 < 4a_0$. Wir setzen $\beta = \frac{\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{2}$, $\alpha = -\frac{a_1}{2}$ und $\lambda = \alpha + i\beta$. Als Fundamentalsystem erhalten wir

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \qquad y_2(x) = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$$

Als allgemeine Lösung der Differentialgleichung erhalten wir

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = e^{-\frac{a_1}{2}x} \cdot (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

2. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

Als (faktorisiertes) charakteristisches Polynom erhalten wir

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} \qquad \text{wobei } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

3. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'''' + 2y''' - 2y' - y = 0$$

Als (faktorisiertes) charakteristisches Polynom erhalten wir

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda - 1 \\ &= (\lambda + 1)^3(\lambda - 1) \end{aligned}$$

Wir erhalten als Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^x \\ y_2(x) &= e^{-x} \\ y_3(x) &= x \cdot e^{-x} \\ y_4(x) &= x^2 \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

und somit als allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2) \cdot e^{-x} \qquad (c_i \in \mathbb{R})$$

4. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + y = 0$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

Als Lösungen für λ erhalten wir

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

Daraus ergibt sich das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = \cos x \qquad y_2(x) = \sin x$$

und die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

5. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'''' - y = 0$$

mit dem (faktorisierten) charakteristischen Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 1 = (\lambda^2 + 1)\ \underbrace{(\lambda^2 - 1)}_{(\lambda-1)(\lambda+1)}$$

Wir erhalten als Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^x \\ y_2(x) &= e^{-x} \\ y_3(x) &= \cos x \\ y_4(x) &= \sin x \end{aligned}$$

und somit als allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

4.6.4 Satz (Lösungen inhomogener Probleme)

Wir betrachten nun das inhomogene Problem

$$L(y) = b(x)$$

wobei $b(x)$ *Störfunktion* heißt.
Wenn

$$b(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \cdot p(x) \qquad \text{oder} \qquad b(x) = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x \cdot p(x)$$

wobei

$$p(x) = b_m x^n + \ldots + b_1 x + b_0$$

ein Polynom ist, dann unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Wenn $\lambda = \alpha + i\beta$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ ist, dann führt der Ansatz

$$\begin{aligned} y(x) = e^{\alpha x}(&\cos\beta x(A_m x^m + \ldots + A_1 x + A_0) \\ &+ \sin\beta x(B_m x^m + \ldots + B_1 x + B_0)) \end{aligned}$$

   zum Ziel.

2. Wenn $P(\alpha + i\beta) = 0$ („Resonanzfall") mit Vielfachheit k, dann führt der Ansatz

$$\begin{aligned} y(x) = x^k \cdot e^{\alpha x}(&\cos\beta x(A_m x^m + \ldots + A_1 x + A_0) \\ &+ \sin\beta x(B_m x^m + \ldots + B_1 x + B_0)) \end{aligned}$$

   zum Ziel.

In beiden Fällen werden die A_i, B_j nach Einsetzen in die Differentialgleichung durch Koeffizientenvergleich bestimmt.

Beispiel

Wir betrachten die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$y'''' - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 4x^2$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda - (1+i))^2(\lambda - (1-i))^2$$

In der allgemeine Störfunktion $b(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x \cdot p(x)$ ist $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ zu setzen. In obigem Satz betrachten wir nun den Fall 1 (da $\alpha = 0, \beta = 0$ und $\lambda = 0$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist) und wählen somit den Ansatz

$$y(x) = A_2 x^2 + A_1 x + A_0$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir

$$4A_2 \cdot x^2 + (-16A_2 + 4A_1) \cdot x + (16A_2 - 8A_1 + 4A_0) = 4x^2$$

also (mit Koeffizientenvergleich) $A_2 = 1, A_1 = 4, A_0 = 4$. Somit ist

$$y(x) = x^2 + 4x + 4$$

eine Lösung der Differentialgleichung.

Beispiel: Differentialgleichung für die Feder mit Reibung

Wir betrachten die Differentialgleichung für die Feder mit Reibung r und Federkonstante k:

$$L(x) = mx'' + rx' + kx \qquad (r, k \geq 0)$$

Wir betrachten zwei Fälle:

a) $L(x) = 0$ („freie Schwingung")

b) $L(x) = \cos\beta x$ („erzwungene Schwingung")

Fall a) Wir bestimmen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = m\lambda^2 + r\lambda + k = 0$$

mit

$$\lambda_{1,2} = \frac{-r}{2m} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

Wir betrachten hier folgende Fälle:

1. „periodischer Fall“:

   Für $r^2 < 4km$ erhalten wir zwei konjungiert komplexe Nullstellen und somit die allgemeine Lösung

   $$x(t) = e^{-\varrho t}(c_1 \cdot \cos \omega t + c_2 \cdot \sin \omega t)$$

   wobei $\varrho = \frac{r}{2m}$ und $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \varrho^2}$.

   Es handelt sich in diesem Fall also um die Überlagerung von gedämpften Schwingungen.

   Bemerkung: Wenn $r = 0$, dann ist

   $$x(t) = c_1 \cdot \cos \omega_0 t + c_2 \cdot \sin \omega_0 t$$

   wobei $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Somit handelt es sich bei nicht vorhandener Reibung also um eine ungedämpfte Schwingung.

2. „aperiodischer Fall“:

   Für $r^2 > 4km$ erhalten wir zwei reelle, negative und voneinander verschiedene Nullstellen λ_1, λ_2 und die allgemeine Lösung

   $$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

   Diese klingt gegen 0 ab ohne zu schwingen.

3. „aperiodischer Grenzfall“:

   Für $r^2 = 4km$ erhalten wir eine negative reelle Nullstelle $\lambda = \frac{-r}{2m}$ mit Vielfachheit 2 und somit die Lösung

   $$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t)$$

   Diese klingt gegen 0 ab ohne zu schwingen, hat aber unter Umständen eine Nullstelle (z.B. für $c_1 = 1, c_2 = -1$ bei $t = 1$).

Fall b) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = \cos \beta t$$

In obigem Satz ist also $\alpha = 0$ und $p(t) = 1$ zu setzen. Wenn $i\beta$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, d.h. im „Resonanzfall“, ist $0 = \alpha = \frac{-r}{2m}$, also $r = 0$ und $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Die Nullstelle hat also Vielfachheit 1. Wir verwenden den Ansatz:

$$x(t) = t \cdot (A \cos \beta t + B \sin \beta t)$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir mit Koeffizientenvergleich:

1. $kAt + m(2\beta B - \beta^2 At) = 1$
2. $kBt + m(-2\beta A - \beta^2 Bt) = 0$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} A &= \frac{kt - \beta^2 mt}{2\beta m} \cdot B = 0 \qquad \text{(aus 2.) und} \\ B &= \frac{1}{2\beta m} \qquad \text{(aus 1.)} \end{aligned}$$

und somit die Lösung

$$x(t) = \frac{t}{2\beta m} \sin \beta t$$

Für $t \to \infty$ „explodiert“ $x(t)$, man nennt dies „Resonanzkatastrophe“.
Wenn der Resonanzfall nicht vorliegt verwenden wir den Ansatz

$$x(t) = A \cos \beta t + B \cdot \sin t$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir mit Koeffizientenvergleich:

1. $Ak + B\beta r - A\beta^2 m = 1$
2. $Bk - A\beta r - B\beta^2 m = 0$

Mit der Zwischenannahme $\beta^2 \neq \frac{k}{m}$ (d.h. die Diskriminante ist $\neq 0$) ergibt sich

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{k + \frac{\beta^2 r^2}{k - m\beta^2} - m\beta^2} = \frac{k - m\beta^2}{(k - m\beta^2)^2 + (r\beta)^2} \\ B &= \frac{A\beta r}{k - m\beta^2} = \frac{\beta r}{(k - m\beta^2)^2 + (r\beta)^2} \end{aligned}$$

Sei

$$a := \frac{1}{\sqrt{(k - m\beta^2)^2 + (r\beta)^2}}$$

dann gilt $\left(\frac{A}{a}\right)^2 + \left(\frac{B}{a}\right)^2 = 1$. Sei φ_0 so, dass $\frac{A}{a} = \cos \varphi_0$ und $\frac{B}{a} = \sin \varphi_0$, d.h.

$$\varphi_0 = \arctan \frac{\frac{B}{a}}{\frac{A}{a}} = \arctan \frac{B}{A} = \arctan \frac{\beta r}{k - m\beta^2}$$

Aufgrund des Additionstheorems $\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$ gilt

$$\begin{aligned}
\cos(\beta t - \varphi_0) &= \cos \beta t \cdot (-\varphi_0) - \sin \beta t \cdot \sin(-\varphi_0) \\
&= \cos \varphi_0 \cdot \cos \beta t + \sin \varphi_0 \cdot \sin \beta t \\
&= \frac{A}{a} \cos \beta t + \frac{B}{a} \sin \beta t
\end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$x(t) = A \cdot \cos \beta t + B \cdot \sin \beta t = a \cos(\beta t - \varphi_0)$$

wobei

$$a = \frac{1}{\sqrt{(k - m\beta^2)^2 + (r\beta)^2}} \qquad \text{und} \qquad \varphi_0 = \arctan \frac{\beta r}{k - m\beta^2}$$

Wenn (entgegen der Zwischenannahme) $\beta^2 = \frac{k}{m}$, erhalten wir $A = 0$ (aus 2.) und $B = \frac{1}{\beta r}$ (aus 1.). Die obigen Formeln für A und B gelten also auch in diesem Fall.

4.7 Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

Wir betrachten Differentialgleichungen n-ter Ordnung der Form

$$(1) \qquad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Die Funktionen

$$z_1(x) = y(x),\ z_2(x) = y'(x),\ \dots,\ z_n(x) = y^{(n-1)}(x)$$

lösen das System

$$(2) \begin{cases} z_1' = z_2 \\ \vdots \\ z_n' = f(z_1, \dots, z_n) \end{cases}$$

Wenn $z_1, \dots, z_n$ (2) lösen, dann ist z_1 eine Lösung von (1).
Bemerkung: Bei

$$\underbrace{< z_1, \dots, z_n >}_{I \to \mathbb{R}^n}(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$$

handelt es sich um eine Bewegung im $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung Die Anfangsbedingungen für (1)

$$y(x_0) = \alpha_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$$

können wir umschreiben zu

$$z_k(x_0) = \alpha_{k-1} \qquad (1 \le k \le n)$$

Beispiel

Wir betrachten eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b$$

Diese geht über in

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= z_3 \\ &\vdots \\ z_n' &= -a_0 z_1 - a_1 z_2 - \ldots - a_{n-1} z_n + b \end{aligned}$$

Dies lässt sich schreiben als

$$\vec{z}\,' = Az + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & & & \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

die als *Frobeniusmatrix* bezeichnet wird.
Es gilt

$$\underbrace{P_A(\lambda)}_{\text{char. Polynom von } A} = \underbrace{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0}_{\text{char. Polynom der Dgl.}}$$

Zur Erinnerung: $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

Beweis Durch Induktion über n zeigen wir:

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

Induktionsanfang ($n = 1$):

$$A = \begin{pmatrix} -a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda + a_{n-1} = \lambda + a_0$$

Induktionsschritt ($n \to n + 1$):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-1} & -a_n \end{pmatrix}$$

Sei $\alpha = a_{n-1} - \lambda$, dann gilt

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \underbrace{\lambda + \alpha}_{=a_{n-1}} & \lambda + a_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \qquad \text{(Entwicklung nach letzten Spalte)} \\ &= \underbracket{(\lambda + a_n) \cdot \det(\lambda I - \tilde{A}_{n+1\ n+1})} \underbracket{-(-1) \cdot \underbrace{\det(\lambda I - \tilde{A}_{n\ n+1})}_{=P(\lambda) \text{ für } n \text{ mit I.H.}}} \\ &= \underbracket{(\lambda + a_n) \cdot \lambda^n} + \underbracket{\lambda^n + \lambda^{n-1}\alpha + \lambda^{n-2}a_{n-2} + \ldots + \lambda a_1 + a_0} \\ &= \underbracket{\lambda^{n+1} + \lambda^n a_n} + \underbracket{\lambda^n + \lambda^{n-1}a_{n-1} - \lambda^n + \lambda^{n-2}a_{n-2} + \ldots + a_0} \\ &= \lambda^{n+1} + \lambda^n a_n + \lambda^{n-1}a_{n-1} + \ldots + \lambda a_1 + a_0 \end{aligned}$$

Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten Differentialgleichungen der Form

$$(1) \qquad \vec{y}\,' = A \cdot \vec{y} \qquad \text{(homogenes Problem)}$$

Bemerkung: Die Lösungen bilden einen Vektorraum.

4.7.1 Satz

Sei A eine $n \times n$-Matrix, dann besitzt (1) ein Fundamentalsystem von n Lösungen. Das heißt, der Vektorraum der Lösungen von (1) hat Dimension n.
Wenn $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ Eigenwerte von A und $v_1, \ldots, v_n$ zugehörige Eigenvektoren sind, dann sind die Funktionen

$$y_i(x) = e^{\lambda_i x} \cdot v_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

Lösungen von (1).
Sind die Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig, dann bilden $y_1, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem für (1).
Wenn die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ paarweise verschieden sind, so erhalten wir ein Fundamentalsystem.
Wenn $\lambda_i \in \mathbb{C}$ geht man folgendermaßen vor:
Sei $\lambda = \alpha + i\beta$ ein komplexer Eigenwert der Matrix A und $\vec{v} = \vec{a} + i\,\vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$) ein zugehöriger Eigenvektor. Dann ist

$$\begin{aligned} \vec{y}(x) &= e^{\lambda x} \cdot \vec{v} = e^{(\alpha + i\beta)\cdot x} \cdot (\vec{a} + i\,\vec{b}) \\ &= e^{\alpha x} \cdot (\cos\beta x + i \sin\beta x) \cdot (\vec{a} + i\,\vec{b}) \\ &= e^{\alpha x} \cdot (\cos\beta x \cdot \vec{a} - \sin\beta x \cdot \vec{b}) + i e^{\alpha x} \cdot (\sin\beta x \cdot \vec{a} + \cos\beta x \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

und es sind sowohl Real- als auch Imaginärteil Lösungen von (1).

Der konjugiert komplexe Eigenwert $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ hat den Eigenvektor $\overline{\vec{v}} = \vec{a} - i\,\vec{b}$, da

$$\overline{\lambda} \cdot \overline{\vec{v}} = \overline{\lambda \cdot \vec{v}} = \overline{A\vec{v}} = \overline{A} \cdot \overline{\vec{v}} = A \cdot \overline{\vec{v}} \qquad (\text{weil } A \in \mathbb{R}^{n\times n})$$

und somit ist die zugehörige Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\overline{\lambda}x} \cdot \overline{\vec{v}} = e^{(\alpha - i\beta)\cdot x} \cdot (\vec{a} - i\,\vec{b}) \\ &= e^{\alpha x} \cdot \underbrace{(\cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x))}_{\cos\beta x - i\sin\beta x} \cdot (\vec{a} - i\,\vec{b}) \\ &= e^{\alpha x} \cdot (\cos\beta x \cdot \vec{a} - \sin\beta x \cdot \vec{b}) + ie^{\alpha x}(-\sin\beta x \cdot \vec{a} - \cos\beta x \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

Die Realteile der Lösungen für λ bzw. $\overline{\lambda}$ stimmen überein; der Imaginärteil der Lösung für $\overline{\lambda}$ ist das Negative des Imaginärteils der Lösung für λ. Das heißt, $\overline{\lambda}$ liefert keinen neuen Beitrag zum Fundamentalsystem.
Wenn alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A paarweise verschieden sind, so lässt sich daraus ein Fundamentalsystem für (1) ablesen.

4.7.2 Satz

Wenn $y_1, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem für $A \cdot \vec{y} = \vec{y}'$ ist, dann ist die Matrix

$$Y(x) = \big(y_1(x) \mid \ldots \mid y_n(x)\big)$$

für alle x im Definitionsbereich invertierbar.
Wir betrachten das inhomogene System

$$(2) \qquad \vec{y}' = A \cdot \vec{y} + \vec{b}$$

Ansatz

$$\vec{y}(x) = Y(x) \cdot v(x)$$

wobei

$$v(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \end{pmatrix}$$

Also

$$\vec{y}(x) = v_1(x) \cdot y_1(x) + \ldots + v_n(x) \cdot y_n(x)$$

Unter der Annahme, dass $\vec{y}$ die Differentialgleichung erfüllt betrachten wir nun:

$$\begin{aligned} &\underline{Y'(x) \cdot v(x)} + Y(x) \cdot v'(x) \underset{\text{mit Produktregel}}{=} \vec{y}'(x) = A \cdot \vec{y}(x) + \vec{b}(x) \\ &= \underbrace{A \cdot Y(x)}_{=Y'(x)} \cdot v(x) + b(x) = \underline{Y'(x) \cdot v(x)} + \vec{b}(x) \end{aligned}$$

Somit muss gelten:

$$Y(x) \cdot v'(x) = \vec{b}(x)$$

also

$$v'(x) = Y(x)^{-1} \cdot \vec{b}(x)$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\vec{y}'(x) &= Y'(x) \cdot v(x) + Y(x) \cdot v'(x) \\
&= A \cdot Y(x) \cdot v(x) + Y(x) \cdot Y(x)^{-1} \cdot \vec{b}(x) \\
&= A \cdot \vec{y} + \vec{b}(x)
\end{aligned}$$

Also ist $Y(x) \cdot v(x)$ eine Lösung von (2).
Wegen $v'(x) = Y(x)^{-1} \cdot \vec{b}(x)$ gilt

$$\vec{v}(x) = \vec{c} + \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(x) \cdot \vec{b}(x)\, dx$$

Durch geeigenete Wahl von $\vec{c}$ kann man die Anfangsbedingungen erfüllen.

Beispiel

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Diese ist äquivalent zu dem System

$$\begin{aligned}
z_1' &= z_2 \\
z_2' &= -z_1 + 2z_2
\end{aligned}$$

Das heißt

$$z' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot z$$

Wir erhalten

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 2) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Also hat A den Eigenwert 1 mit Vielfachheit 2 und unser Satz ist somit nicht anwendbar, um ein Fundamentalsystem zu erhalten.

Beispiel

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Diese ist äquivalent zu dem System

$$z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot z$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Wir erhalten also die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Somit erhalten wir die Lösungen

$$\vec{z_1}(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{z_2}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und damit die allgemeine Lösung

$$\vec{y}(x) = c_1 \cdot \vec{z_1}(x) + c_2 \vec{z_2}(x) = \begin{pmatrix} c_1 e^x + c_2 e^{2x} \\ c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Beispiel

Wir betrachten das folgende System von Differentialgleichungen

$$y_1' = 2y_2$$
$$y_2' = -y_1 + 2y_2$$

und erhalten

$$z' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot z$$

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

Wir erhalten $\lambda = 1 + i$ und $\overline{\lambda} = 1 - i$ als Eigenwerte der Matrix. Zum Eigenwert $1 + i$ bestimmen wir den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 + i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Daraus erhalten wir das Fundamentalsystem

$$\vec{y_1}(x) = e^x \cdot \left(\cos x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
$$\vec{y_2}(x) = e^x \left(\sin x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

und die allgemeine Lösung

$$\vec{y}(x) = e^x \cdot \begin{pmatrix} 2c_1 \cos x + 2c_2 \sin x \\ (c_1 + c_2) \cos x + (c_2 - c_1) \sin x \end{pmatrix}$$

4.7.3 Eliminationsverfahren

Gegeben seien zwei Differentialgleichungen der Form

i) $\ddot{x}_1 = ax_1 + bx_2$

ii) $\ddot{x}_2 = cx_1 + dx_2$

Um eine Lösung für diese Gleichungen zu bestimmen gehen wir folgendermaßen vor:

a) Differentiation von i) ergibt

$$x_1^{(4)} = ax_1^{(2)} + bx_2^{(2)}$$

b) Aus i) ergibt sich außerdem

$$bx_2 = \ddot{x}_1 - ax_1$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} x_1^{(4)} &\underset{\text{a)}}{=} ax_1^{(2)} + bx_2^{(2)} \underset{\text{ii)}}{=} ax_1^{(2)} + b(cx_1 + dx_2) = ax_1^{(2)} + bcx_1 + dbx_2 \\ &\underset{\text{b)}}{=} ax_1^{(2)} + bcx_1 + d(x_1^{(2)} - ax_1) \\ &= (a+d)x_1^{(2)} + (bc - ad)x_1 \end{aligned}$$

Die so erhaltene Gleichung

$$x_1^{(4)} = (a+d)x_1^{(2)} + (bc - ad)x_1$$

ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 4. Ordnung für x_1, die wir unter Umständen mit den bekannten Methoden lösen können.

4.8 Randwertprobleme und Ausblick auf partielle Differentialgleichungen

Bei einem Randproblem sind im Unterschied zu einem Anfangsproblem nicht alle Werte zu einem Zeitpunkt gegeben, sondern es werden beispielsweise Vorgaben zu Beginn und Ende des Betrachtungsintervalls postuliert. Die Allgemeine Form der Randbedingung für eine Differentialgleichung n. Ordnung ist:

$$y(x_i) = y_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

Beispiele

1. Wir betrachten die Differentialgleichung

   $$y'' + y = 0$$

   Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

   $$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

   Wir studieren folgende Randwertprobleme:

a) $y(0) = 0,\ y(1) = 1$
Daraus bestimmen wir $c_1 = 0$ und $c_2 = \frac{1}{\sin 1}$.

b) $y(0) = 1,\ y(\pi) = -1$
Daraus bestimmen wir $c_1 = 1$ und c_2 beliebig.

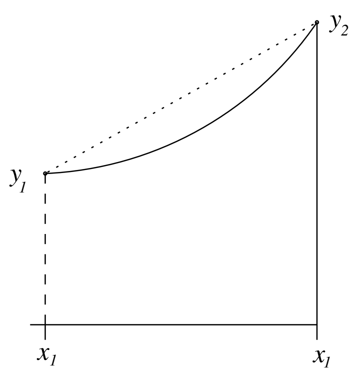
c) $y(0) = 1,\ y(\pi) = 0$
Hier können wir zwar $c_1 = 1$ bestimmen, finden dann aber für c_2 keine Lösung. Also ist dieses Randproblem nicht lösbar.

2. Eine an zwei Punkten aufgehängte Kette erfüllt die Differentialgleichung

$$y'' = a\sqrt{1 + (y')^2} \qquad a > 0$$

wobei a von der Länge und den Materialeigenschaften der Kette abhängt. Dazu sind folgende Randbedinungen gegeben, die die Aufhängepunkte beschreiben:

$$y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2$$



Wir lösen dieses Randwertproblem nach Substitution $z = y'$ mit der Methode „Trennung der Variablen“:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \operatorname{arsinh} z = a \cdot (x + c_1)$$

Also ist

$$z(x) = \sinh(a \cdot (x + c_1))$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Daraus erhalten wir

$$y(x) = \int z(x)\, dx = \frac{1}{a} \cdot \cosh(a \cdot (x + c_1)) + c_2$$

c_1 und c_2 lassen sich aus Randbedingungen im Allgemeinen nur numerisch berechnen. Für $y_1 = y_2$ ist aber eine Berechnung wie folgt möglich:

$$\frac{1}{a} \cosh(a \cdot (x_1 + c_1)) + c_2 = y_1 = y_2 = \frac{1}{a} \cosh(a \cdot (x_2 + c_1)) + c_2$$

Dies lässt sich reduzieren auf

$$\cosh(a(x_1 + c_1)) = \cosh(a(x_2 + c_2))$$

Für $x_1 \neq x_2$ erhalten wir

$$a(x_1 + c_1) = -a(x_2 + c_1)$$

Also

$$x_1 + c_1 = -x_2 - c_1$$

Daraus können wir $c_1 = -\frac{x_1+x_2}{2}$ und $c_2 = y_1 - \frac{1}{a} \cosh\left(a\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\right)$ bestimmen.

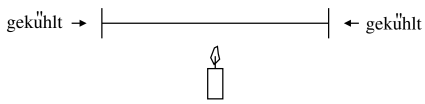
3. Wir betrachten die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

wobei $u(x,t)$ die Temperatur am Ort x zur Zeit t ist.

Situation: Ein Stab der Länge L wird in der Mitte erhitzt und an beiden Enden auf die Temperatur 0 gekühlt. Daraus ergeben sich folgende Randbedingungen:

$$u(x,0) = F(x) \qquad \text{(Temperatur für } t = 0,\ 0 < x < L)$$
$$u(0,t) = 0 = u(L,t) \qquad \text{(für } t \geq 0)$$



Wir interessieren uns nun dafür, wie sich die Wärme im Stab ausbreitet.

Ansatz: $u(x,t) = \varphi(x) \cdot \psi(t)$

Wir bestimmen

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \varphi(x) \cdot \psi(t)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x^2} = \varphi''(x) \cdot \psi(t)$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir

$$\varphi(x) \cdot \psi'(t) = a^2 \varphi''(x) \cdot \psi(t)$$

Dieses lässt sich umformen in

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\psi'(t)}{\psi(t)}$$

Also sind beide Seiten gleich einem Wert λ, d.h.

$$\varphi'' = \lambda\varphi \qquad \psi' = \lambda a^2 \psi$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\varphi'' = \lambda \cdot \varphi$ ist

- für $\lambda > 0$: $\varphi(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$
- für $\lambda < 0$: $\varphi(x) = c_1 \cos(\sqrt{|\lambda|} \cdot x) + c_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}x)$
- für $\lambda = 0$: $\varphi(x) = c_1 + c_2 x$

Die Randbedingungen lassen sich nichttrivial nur für $\lambda < 0$ erfüllen. (In den anderen beiden Fällen ist $c_1 = c_2 = 0$.)
Für $\lambda < 0$ erhalten wir für c_1

$$0 = \varphi(0) = c_1 \cdot \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1$$

und für c_2

$$0 = \varphi(L) = c_2 \cdot \sin(\sqrt{|\lambda|} \cdot L)$$

$\sin(\sqrt{|\lambda|} \cdot L)$ wird 0, falls $\sqrt{|\lambda|} \cdot L = n\pi$, d.h. $\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ (da λ negativ sein muss). Als zugehörige Lösungen erhalten wir

$$\varphi_n(x) = a_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)$$

Für jedes λ_n erhalten wir eine Differentialgleichung für ψ:

$$\dot{\psi}_n = \underbrace{\frac{-n^2\pi^2a^2}{L^2}}_{\lambda_n a^2} \psi_n \qquad \left(\text{aus } \lambda_n = \frac{\dot{\psi}}{a^2\psi}\right)$$

Hierfür erhalten wir die allgemeinen Lösungen

$$\psi_n(t) = b_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{L}\right)^2 t}$$

Also erhält man für jedes n die Lösung

$$u_n = c_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{L}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)$$

wobei $n \in \mathbb{N}$, $c_n \in \mathbb{R}$ und $c_n = a_n + b_n$.
Linearkombinationen der u_n sind Lösungen der Wärmeleitungsgleichung. Wir müssen nun noch die c_n bestimmen. Dazu machen wir den Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{L}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)$$

Gesucht ist (c_n), so dass die Randbedingung

$$F(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)$$

erfüllt ist. Man kann diese Bedingung erfüllen, indem man die ungerade Fortsetzung von F zu einer $2L$-periodischen Funktion in eine Fourierreihe entwickelt.

Bemerkung: Tatsächlich war dies Fouriers Motivation, Fourierreihen zu betrachten.